无限大带电体产生的电场及其零电势点的选取

陈龙法

（石狮市第一中学　福建 泉州　362700）

（收稿日期：2017－12－12）

摘　要：无限大带电体的电荷分布不在有限区域，不宜简单地规定无穷远处电势为零，应根据具体问题的电场强度空间分布特点，灵活选取合适的零电势点.

关键词：无限大　带电体　电场分布　零电势点

无限大的带电体实际上并不存在，它只是一种模型.然而，这是一个有事实基础的模型.对于均匀带电的有限长的棒和有限大的板，在其附近的地方，只要不太靠近端点或边缘，满足适当条件后，就可被视为无限长带电棒和无限大的带电板.在电磁学中，常见的有无限长带电直线、无限长带电圆柱或圆筒、无限大带电平面等.这类带电体因电荷分布不在有限区域，不宜简单地规定无穷远处电势为零，而应根据具体问题中的电场强度空间分布特点，灵活选取合适的零电势点.

1　无限大(长)均匀带电体的电场强度

1.1　无限长均匀带电直线所产生的电场强度

【例 1】如图 1 所示，一无限长均匀带电直线，电荷的线密度为 λ（设 λ 为正）.离带电直线为 r 处的任一点 P 的场强大小为

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

写成矢量形式为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r^2}\boldsymbol{r}$$

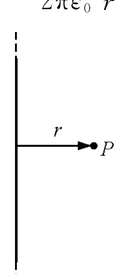

图 1　例 1 题图

1.2　无限长均匀带电圆柱面所产生的电场强度

【例 2】一无限长均匀带电圆柱面，半径为 R，电荷面密度为 σ.求其产生的场强分布.

设场点 P 到轴线的距离为 r.

当 $r>R$ 时，即场点 P 在圆柱面外，如图 2 所示，根据高斯定理，有

$$2\pi rlE=\frac{\sigma 2\pi Rl}{\varepsilon_0}$$

由此得出

$$E=\frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}\qquad (r>R)$$

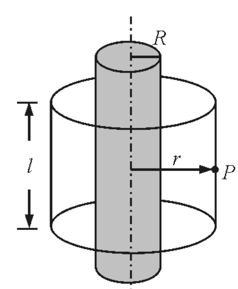

图 2　点 P 在圆柱面外的示意图

如果令 $\lambda=2\pi R\sigma$ 为圆柱面上单位长度的电荷量，则上式可化为

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

可见无限长均匀带电圆柱面外的场强，与将所带电荷全部集中在轴线上的均匀带电直线所产生的场强一样.

当 $r<R$ 时，不难证明，带电圆柱面内部的场强等于零，即 $E=0(r<R)$.

作者简介：陈龙法（1961－　），男，中教高级，主要从事高中物理教学与研究.

当 $r=R$ 时,即无限长均匀带电圆柱面所在处,场强在此处发生了突变,因而不能简单地将 $r=R$ 代入 $E=\frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}$ 式,得出 $E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. 实际上,带电圆柱面所在处的场强 $E\neq\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

为了求出无限长均匀带电圆柱面所在处的场强,可将这个圆柱面看成是无数多个带电直线构成,计算这些直线电荷在圆柱面上某一点 P 产生的电场强度. 这个圆柱面的横截面是一个圆,如图 3 所示. 图中 θ 角度处的线电荷 $\mathrm{d}\lambda=\sigma R\mathrm{d}\theta$ 在 P 点产生的场强为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\frac{\sigma R\mathrm{d}\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}$$

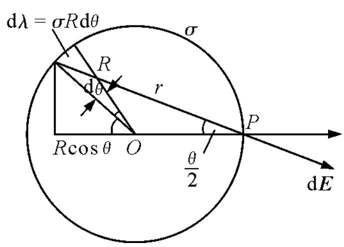

图 3　圆柱面的横截面示意图

$\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 在圆柱面法线方向上的分量为

$$\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}E=\frac{\sigma R\mathrm{d}\theta}{2\pi\varepsilon_0}\frac{R+R\cos\theta}{R^2+R^2+2R^2\cos\theta}=\frac{\sigma\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0}$$

积分后得到

$$E=\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

因此,无限长均匀带电圆柱面产生的场强分布,写成矢量式为

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}=0 & (r<R)\\ \boldsymbol{E}=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{n} & (r=R)\\ \boldsymbol{E}=\dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}\boldsymbol{n} & (r>R)\end{cases}$$

无限长均匀带电圆柱面产生的场强分布,用图像表示,则如图 4 所示.

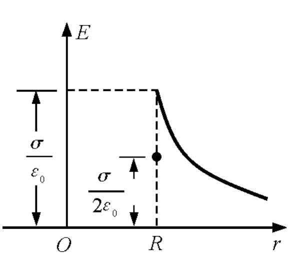

图 4　无限长均匀带电圆柱面产生的场强分布图

1.3　无限大均匀带电平面所产生的电场强度

【例 3】设有一无限大均匀带电平面,电荷面密度为 σ,求场强分布.

如图 5 所示,根据电场分布的对称性特点,取柱体表面为高斯面,其轴线与带电平面垂直,两底与带电面平行,并对带电平面对称. 设底面面积都等于 S,根据高斯定理,有

$$2ES=\frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

即

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

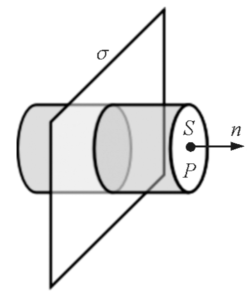

图 5　取柱体表面为高斯面

上式表明,无限大均匀带电平面的场强 E 的大小与场点到带电平面的距离 x 无关.

写成矢量形式为

$$\boldsymbol{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{n}$$

在无限大均匀带电平面的面电荷所在处,有

$$x\to 0_+\qquad \boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}_+=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{n}$$

在带电平面的另一面,面电荷所在处,有

$$x\to 0_-\qquad \boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}_-=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{n}$$

可见,在穿过无限大均匀带电平面时,垂直于该面的方向上,电场强度因反向而发生 $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ 的突变.

1.4　两个带等量异号电荷的无限大平行平面所产生的电场强度

【例 4】两个相同的无限大均匀带电平行平面,相距为 d,带等量异号电荷,电荷的面密度分别为 σ 和 $-\sigma$. 求其场强分布.

根据前面的分析和电场强度叠加原理,如果以两面中间为原点,沿单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 的方向取 x 轴,$\boldsymbol{n}$ 为从 σ 到 $-\sigma$ 的法线方向,则两个相同的无限大均匀带电平行平面产生的电场,在各处的场强分布如下:

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}=0 & \left(x<-\dfrac{d}{2}\right) \\ \boldsymbol{E}=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{n} & \left(x=-\dfrac{d}{2}\right) \\ \boldsymbol{E}=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{n} & \left(\dfrac{d}{2}>x>-\dfrac{d}{2}\right) \\ \boldsymbol{E}=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{n} & \left(x=\dfrac{d}{2}\right) \\ \boldsymbol{E}=0 & \left(x>\dfrac{d}{2}\right) \end{cases}$$

作出的 $\boldsymbol{E}-x$ 图像，如图 6 所示.

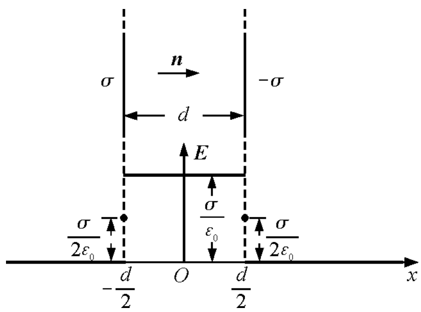

图 6　两个带等量异号电荷的无限大均匀带电平行平面产生的场强

2　电势差及零电势点

2.1　电势差与电势

点电荷的库仑定律是一个可靠的以实验为基础的定律，是静电场的一切概念和规律的出发点. 点电荷 q 在距离为 r 处产生的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\boldsymbol{r}$$

电荷所产生的静电场是保守场，因此，可以用电势来描述静电场，即对于静电场中的每一点，都可以定义一个电势 φ. 静电场中 A，B 两点的电势差通常定义为：单位正电荷从 A 移到 B 静电场力做的功，即

$$\varphi_A-\varphi_B=\int_A^B\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

在点电荷 q 的电场中，A 和 B 两点的电势差为

$$\varphi_A-\varphi_B=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^B\frac{\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{r^3}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)$$

因而

$$\varphi_r-\varphi_\infty=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

或

$$\varphi_r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\varphi_\infty$$

式中 φ_r，φ_∞ 分别是离点电荷 q 为 r 和无穷远处的电势.

2.2　零电势点

正如物体的高度、温度等必须有参考点(零点)一样，静电场中某一点的电势也必须有一个参考点(零点). 在静电场中，通常规定无穷远处的电势为零，即规定 $\varphi_\infty=0$.

在这个规定下，静电场中任一点 P 的电势为

$$\varphi_P=\int_P^\infty\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

点电荷 q 在距离为 r 处产生的电势为

$$\varphi_r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

可见，电场中某一点的电势等于该点与零电势点的电势差，而且这个零电势点是人为主观规定的，并非由自然规律得出的客观结论. 处理某个问题时必须采用同一个零电势点，但在不同的问题里可以选用不同的零电势点. 例如，在静电学里，通常规定无穷远处的电势为零，而在电路的问题里，常规定地球的电势为零.

3　带电体为无限大时 选取无穷远处为零电势点所带来的问题

无限大带电体的电势问题，关键是如何规定零电势点的问题.

当电荷分布在有限区域时，可以规定离这些电荷为无穷远处的电势为零. 这样做最方便，也不会引起任何矛盾. 但当带电体为无限大时，这样做就会出问题了.

3.1　带电体为一个无限大的均匀带电平面

【例 5】如图 7 所示，设有一个无限大的均匀带电平面，电荷的面密度为 σ. 若选取无穷远处的电势为零，求距离带电平面为 r 处的电势.

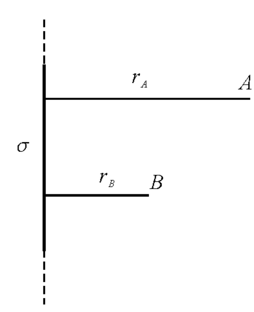

图 7　例 5 题图

在距离带电平面为 r 处，电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

距离带电平面为 r_A 和 r_B 的两点之间的电势差为

$$\varphi_A - \varphi_B = \int_A^B \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(r_B - r_A)$$

这表明在有限范围内，任意两点的电势差都具有确定的值.

但是，当考虑无穷远处时，问题就发生了. 如图 8 所示，考虑这电场中任一点 P 的电势，从 P 点出发，如果沿平行于带电平面的路径（如图 8 中的 PA 方向）前进，则$\int_P^A \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$. 当 A 趋于无穷远时，由于被积函数总是零，故积分等于零. 因此，若这时仍然规定无穷远处电势为零，则得 $\varphi_P = \int_P^\infty \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$，即得出这电场中任一点的电势都等于零，这个结论显然是错误的.

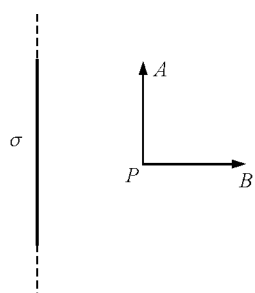

图 8　点 P 电势分析图

这里是不是积分路径移动方向出现问题所带来的错误呢？上面讲的 A 趋于无穷远是相对于 P 点的，但相对于电荷来说并不是趋于无穷远，而是仍在有限的距离内.

下面改变方向，沿垂直于带电平面的路径前进，如图 8 中的 PB 所示. 这时 $\varphi_P - \varphi_B = \int_P^B \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(r_B - r_P)$. 当 B 趋于无穷远时，便离面电荷为无穷远了. 但这时 $\varphi_P - \varphi_\infty = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\infty - r_P)$，若这时仍然规定无穷远处电势为零，即 $\varphi_\infty = 0$，将得出 $\varphi_P = \infty$，即电场中任一点的电势都等于无穷大，这个结论显然也是错误的.

因而只要规定无穷远处电势为零，无论沿着什么路径方向积分，都会出现问题.

3.2　带电体为相距一定距离的两个无限大均匀带电平面

【例 6】设电荷均匀分布在两个无限大的平行平面上，面电荷密度分别为 σ 和 $-\sigma$，相距为 d，如图 9 所示. 若选取无穷远处的电势为零，求在离带电平面为 r 处的电势.

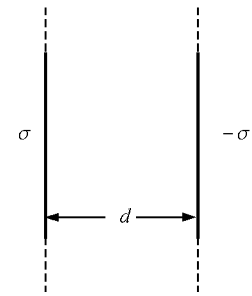

图 9　例 6 题图

这两个面电荷在两面间所产生的电场强度 $\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{n}$ 是由 σ 指向 $-\sigma$ 的单位矢量. 在两面外电场强度 $\boldsymbol{E} = 0$.

由此可得这两个面电荷所在处的电势差为

$$\varphi_+ - \varphi_- = \int_+^- \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d$$

因而得出，左边无穷远处的电势要比右边无穷远处的电势高$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}d$. 这显然是不可能的！

那么，在无限大带电体的电场中，如何解决零电势点的选取问题呢？

4　带电体为无限大时应该根据具体问题选取零电势点

当电荷分布在有限区域，规定离电荷无穷远处的电势为零对于解决问题很方便. 但在处理与无限大带电体的电势有关问题时，就不宜选择无穷远处的电势为零. 由于零电势点是人为规定的，因而可以根据具体情况，按照使计算尽可能简单的原则来选择电势零点.

4.1　一个无限大(长)的带电体其零电势点的选取问题

一个无限大（长）的带电体，常见的有以下几种：

（1）一个无限大的均匀带电平面

对于一个无限大的均匀带电平面，电荷的面密度为 σ. 可以规定平面上（即电荷所在处）的电势为零，这时，离带电平面为 r 处的电势为

$$\varphi_r = \int_r^0 \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_r^0 \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}r = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}r$$

（2）一条无限长的均匀带电直线

对于一条无限长的均匀带电直线，电荷线密度

对新概念物理教程《电磁学》(第2版)中一道习题的讨论

杨向荣
[宜春市第九中学(外国语学校)　江西 宜春　336000]

(收稿日期:2017-08-21)

摘　要:新概念物理教程《电磁学》(第2版)一书中的一道关于带电粒子在磁场中运动的习题,参考答案中将带电粒子在磁场中的运动看成了类平抛运动.本文对该题重新解答,认为只有当满足某特定条件时,该带电粒子在匀强磁场中的匀速圆周运动才能近似看成类平抛运动.

关键词:带电粒子　均匀磁场　匀速圆周运动　类平抛运动

1　原题与参考答案

在赵凯华和陈熙谋主编的新概念物理教程《电磁学》(第2版)一书中,有一道关于带电粒子在磁场中运动的习题,题目如下.

【题目】如图1所示,一质量为 m 的粒子带有电荷量 q,以速度 v 射入磁感应强度为 B 的均匀磁场,v 与 B 垂直;粒子从磁场出来后继续前进.已知磁场区域在 v 方向(即 x 方向)上的宽度为 l,当粒子从磁场出来后在 x 方向前进的距离为 $L-\dfrac{l}{2}$ 时,求它的偏转 y[1].

为λ.可以规定离直线为 R(R 为某一固定值)处的圆柱面上的电势为零,这时,离该面为 r 处的电势为

$$\varphi_r=\int_r^R \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_r^R\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_r^R\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r}$$

(3)一根无限长均匀带电的圆柱面

对于无限长均匀带电的圆柱面,半径为 R,电荷的面密度为 σ.可以规定该圆柱面上的电势为零,这时离轴线为 r 处的电势为

$$\varphi_r=\int_r^R\frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r=\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r}\qquad (r>R)$$

$$\varphi=0\qquad (r\leqslant R)$$

4.2　有两个无限大带电平面时的零电势点问题

对于有两个无限大带电平面的电场,可以规定一个面电荷所在处的电势为零.例如,规定 $-\sigma$ 处的电势为零,以两面中间为原点,沿着从 σ 到 $-\sigma$ 的法线方向取 x 轴,这时各处的电势为

$$\varphi=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}d\qquad \left(x\leqslant -\frac{d}{2}\right)$$

$$\varphi=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{d}{2}-x\right)\qquad \left(\frac{d}{2}\geqslant x\geqslant -\frac{d}{2}\right)$$

$$\varphi=0\qquad \left(x\geqslant\frac{d}{2}\right)$$

作出的 $\varphi-x$ 图像,如图10所示.

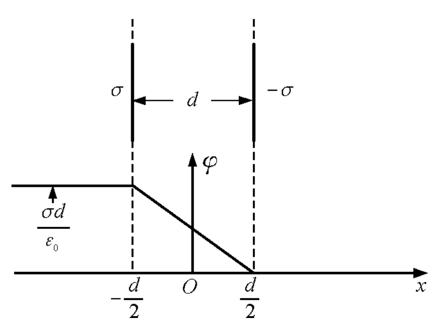

图10　两个无限大带电平面 $\varphi-x$ 图像

参考文献

1　赵凯华,陈熙谋.新概念物理教程:电磁学(第2版).北京:高等教育出版社,2006.12

2　梁灿斌.普通物理学教程:电磁学(第2版).北京:高等教育出版社,2004.5

3　郭硕鸿.电动力学(第2版).北京:高等教育出版社,1997.7