

# 线性条件下变压器的一般处理

郭海滨 黄亦斌 李霖

(江西师范大学物理与通信电子学院 江西 南昌 330000)

(收稿日期:2018-01-11)

**摘要:**在线性条件下,从基本的电磁感应定律出发,系统地给出了变压器的各种结论,包括一般电流情形下无漏磁条件的等价推论和电压比公式,以及交流电情形下的一般等效替换公式和电压比、电流比公式,并分析了空载电流和功率平衡问题.还详细讨论了理想变压器的4个条件,指出了现有高中教材中的某些问题,并澄清了一些误解,如“电流比公式是功率平衡的推论”.

**关键词:**线性介质 等效替换 电压比公式 功率平衡 理想变压器

变压器是利用电磁感应实现变压的元件,含原、副线圈,分别处在原、副电路中.线圈包住磁性材料,其磁化效应非常大,可资利用.本文从基础的电磁感应出发探讨一系列理论问题.

## 1 一般电流情形

首先假定两线圈(包括内部的铁芯)是线性元件(铁芯无磁滞、涡流等铁损),于是可定义自感  $L_1$ ,  $L_2$  和互感  $M$ .如图1所示建立各物理量的正方向,其中副电路中电流  $i_2$  的正方向可要求  $M > 0$  ( $i_2$  在铁芯内产生的磁通方向与  $i_1$  产生的一致)而确定.于是,根据法拉第电磁感应定律,两线圈的感生电动势(自感与互感之和)分别为

$$\begin{aligned} e_1 &= -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ e_2 &= -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \quad (1)$$

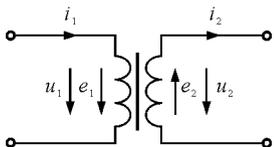


图1 变压器

线圈本身由金属制成,满足欧姆定律.设两线圈的内阻分别为  $R_1, R_2$ , 则

$$\begin{aligned} u_1 &= -e_1 + i_1 R_1 \\ u_2 &= e_2 - i_2 R_2 \end{aligned} \quad (2)$$

上述两组方程构成以下讨论的基础.

考虑无漏磁情形.此时,每匝线圈的磁通量  $\Phi$  都相等,故原、副线圈的自感电动势又可以写为

$$\begin{aligned} e_1 &= -N_1 \frac{d\Phi}{dt} \\ e_2 &= -N_2 \frac{d\Phi}{dt} \end{aligned}$$

于是,结合式(1),有

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}}{M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}} = \frac{N_1}{N_2} \quad (3)$$

由于  $i_1(t), i_2(t)$  独立,故有

$$\frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

即

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{L_1 L_2} \\ \frac{L_1}{L_2} &= \frac{N_1^2}{N_2^2} \end{aligned} \quad (4)$$

可见无漏磁时互感系数取得的最大值  $M_{\max} = \sqrt{L_1 L_2}$ .

在能量方面,由式(2)和(1)易得

$$\begin{aligned} u_1 i_1 - u_2 i_2 &= i_1^2 R_1 + i_2^2 R_2 + \\ &\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right) \end{aligned} \quad (5)$$

其意义非常明显:输入功与输出功之差提供了线圈内阻的焦耳热和介质中磁能的变化.如果线圈内阻为零,则由式(2)、(3)得到电压比公式

$$\frac{u_1}{u_2} = -\frac{e_1}{e_2} = -\frac{N_1}{N_2} \quad (6)$$

## 2 交流电情形

假定变压器两边接的都是(二端)线性电路. 电路接通后, 经过暂态过程, 系统稳定下来, 各物理量都随时间做简谐变化(受迫振动的稳定解), 故对任一量(电流或电压) $a(t) = \sqrt{2}A\cos(\omega t + \varphi)$ ( $A$  为有效值) 可以引入复数表示  $\tilde{a}(t) = \sqrt{2}Ae^{j\varphi}e^{j\omega t} = \sqrt{2}\tilde{A}e^{j\omega t}$  ( $j$  为虚数单位), 使得  $a(t) = \text{Re}\tilde{a}(t)$ .

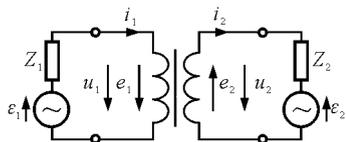


图 2 变压器两端连接二端网络

戴维南定理也适用于交流电路. 任意的二端线性电路都可以用复电动势  $\tilde{E}$  和复阻抗  $\tilde{Z}$  来描述, 即可以等效为一个恒压源与一个线性元件(电阻、电感、电容或其组合)的串联, 故可以一般性地假定变压器两边所接电路的参数为  $\tilde{E}_1, \tilde{Z}_1$  和  $\tilde{E}_2, \tilde{Z}_2$ , 如图 2 所示. 于是有

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1 &= \tilde{I}_1 \tilde{Z}_1 + \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 &= \tilde{I}_2 \tilde{Z}_2 + \tilde{E}_2 \end{aligned} \quad (7)$$

且由式(2)和(1), 有

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1 &= (R_1 + j\omega L_1)\tilde{I}_1 + j\omega M\tilde{I}_2 \\ \tilde{U}_2 &= -(R_2 + j\omega L_2)\tilde{I}_2 - j\omega M\tilde{I}_1 \end{aligned} \quad (8)$$

解方程组(7)、(8), 可得

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1 &= \frac{[(R_1 + j\omega L_1)(\tilde{Z}_2 + R_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2]\tilde{E}_1 - j\omega M\tilde{Z}_1\tilde{E}_2}{(\tilde{Z}_1 + R_1 + j\omega L_1)(\tilde{Z}_2 + R_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2} \\ \tilde{U}_2 &= \frac{[(R_2 + j\omega L_2)(\tilde{Z}_1 + R_1 + j\omega L_1) + \omega^2 M^2]\tilde{E}_2 - j\omega M\tilde{Z}_2\tilde{E}_1}{(\tilde{Z}_1 + R_1 + j\omega L_1)(\tilde{Z}_2 + R_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= \frac{(\tilde{Z}_2 + R_2 + j\omega L_2)\tilde{E}_1 + j\omega M\tilde{E}_2}{(\tilde{Z}_1 + R_1 + j\omega L_1)(\tilde{Z}_2 + R_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2} \\ \tilde{I}_2 &= -\frac{(\tilde{Z}_1 + R_1 + j\omega L_1)\tilde{E}_2 + j\omega M\tilde{E}_1}{(\tilde{Z}_1 + R_1 + j\omega L_1)(\tilde{Z}_2 + R_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2} \end{aligned} \quad (10)$$

结果表明电路中的电压、电流如何由电路中的

各种参数来确定.

我们还可以得到非常一般的等效替换公式(图 3).

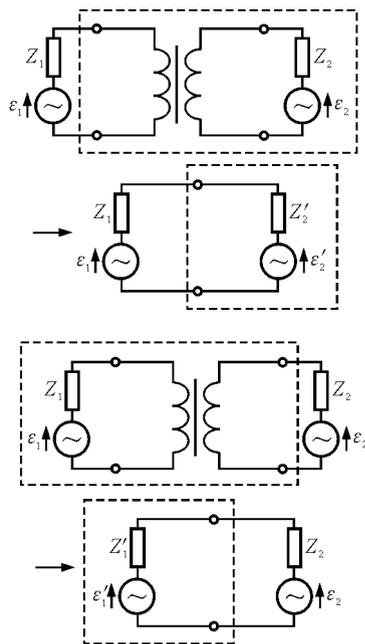


图 3 变压器的等效替换

由式(7)第二式和式(8)两式消  $\tilde{U}_2, \tilde{I}_2$ , 得到方程  $\tilde{U}_1 = \tilde{I}_1 \tilde{Z}'_2 + \tilde{E}'_2$ , 其中

$$\begin{aligned} \tilde{Z}'_2 &= R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\tilde{Z}_2 + R_2 + j\omega L_2} \\ \tilde{E}'_2 &= -\frac{j\omega M\tilde{E}_2}{\tilde{Z}_2 + R_2 + j\omega L_2} \end{aligned} \quad (11)$$

只与变压器和副电路有关. 这就是说, 对于原电路的左部分而言, 可以把变压器和副电路等效为电动势为  $\tilde{E}'_2$ , 阻抗为  $\tilde{Z}'_2$  的两端网络. 同样, 由式(7)第一式和式(8)两式消  $\tilde{U}_1, \tilde{I}_1$ , 得到方程  $\tilde{E}'_1 = \tilde{I}_2 \tilde{Z}'_1 + \tilde{U}_2$ , 其中

$$\begin{aligned} \tilde{Z}'_1 &= R_2 + j\omega L_2 + \frac{\omega^2 M^2}{\tilde{Z}_1 + R_1 + j\omega L_1} \\ \tilde{E}'_1 &= -\frac{j\omega M\tilde{E}_1}{\tilde{Z}_1 + R_1 + j\omega L_1} \end{aligned} \quad (12)$$

只与变压器和原电路有关. 这就是对副电路的右部分而言, 原电路和变压器构成的整体的等效参数. 等效替换公式(11)、(12)跟结果(9)、(10)完全等价, 但形式上更简单.

### 3 各种条件导致的简化

如果考虑无漏磁条件(4),则等效替换公式(11)和(12)中的两个等效复阻抗分别变为

$$\begin{aligned}\tilde{Z}'_2 &= R_1 + \frac{j\omega L_1(\tilde{Z}_2 + R_2)}{\tilde{Z}_2 + R_2 + j\omega L_2} \\ \tilde{Z}'_1 &= R_2 + \frac{j\omega L_2(\tilde{Z}_1 + R_1)}{\tilde{Z}_1 + R_1 + j\omega L_1}\end{aligned}\quad (13)$$

该式表明,复阻抗为 $\tilde{Z}'_2$ 的等效元件可视为由一个复阻抗为 $\frac{(\tilde{Z}_2 + R_2)N_1^2}{N_2^2}$ 的等效元件与一个电感( $j\omega L_1$ )并联,再与电阻 $R_1$ 串联的结果。 $\tilde{Z}'_1$ 的解释完全类似.如果进一步还有线圈内阻为零,则由式(9)或直接由式(6)可得电压变比公式

$$\frac{\tilde{U}_1}{\tilde{U}_2} = -\frac{N_1}{N_2}\quad (14)$$

注意两电压反相.

以下默认变压器无漏磁且无内阻.要想表达式足够简单,必须做进一步简化.如果

$$|\tilde{Z}_2| \ll \omega L_2\quad (15)$$

则等效公式(11)变为

$$\tilde{Z}'_2 \approx \frac{N_1^2}{N_2^2} \tilde{Z}_2 \quad \tilde{E}'_2 \approx -\frac{N_1}{N_2} \tilde{E}_2\quad (16)$$

如果

$$|\tilde{Z}_1| \ll \omega L_1\quad (17)$$

则等效公式(12)变为

$$\tilde{Z}'_1 \approx \frac{N_2^2}{N_1^2} \tilde{Z}_1 \quad \tilde{E}'_1 \approx -\frac{N_2}{N_1} \tilde{E}_1\quad (18)$$

如果条件(15)和(17)同时成立,则由式(10)可得到我们熟知的电流变比公式

$$\frac{\tilde{I}_1}{\tilde{I}_2} \approx -\frac{N_2}{N_1}\quad (19)$$

注意两电流反相.

但若副电路断路( $|\tilde{Z}_2| \rightarrow \infty$ ),则违背条件(15).此时由式(10),有

$$\tilde{I}_1 = \tilde{I}_{10} \equiv \frac{\tilde{E}_1}{\tilde{Z}_1 + j\omega L_1} \quad \tilde{I}_2 = 0\quad (20)$$

即空载时虽然副电路中无电流,但原电路中存在空

载电流 $\tilde{I}_{10}$ .另一常见情形是副电路无源( $\tilde{E}_2 = 0$ ),此时由式(10)得

$$\frac{\tilde{I}_1}{\tilde{I}_2} = \frac{j\tilde{Z}_2}{\omega\sqrt{L_1 L_2}} - \frac{N_2}{N_1}\quad (21)$$

容易得出,该式变为式(19)的前提也是条件(15).

而若 $\tilde{Z}_1 = 0$ ,则由式(10)和(20)可计算出 $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_{10}$ ,发现它们满足

$$\tilde{I}_1 = \tilde{I}_{10} - \frac{N_2}{N_1} \tilde{I}_2\quad (22)$$

其他情形都可以从一般结果(9)~(13)中得到.

在能量方面,变压器的输入功率与输出功率即是在无内阻时也不一定瞬时相等,因为线圈可以储存和释放磁能(见式(5)).但我们感兴趣的是平均效应.注意交流电的平均功率不是 $UI$ ,而是 $\bar{P} = UI \cos \varphi = \text{Re}(\tilde{U}^* \tilde{I})$ ,因为电压与电流之间存在相位差.即使在变压器有内阻、有漏磁的情形,由式(9)和(10)直接计算,得到

$$\begin{aligned}\tilde{U}_1^* \tilde{I}_1 - \tilde{U}_2^* \tilde{I}_2 - |\tilde{I}_1|^2 R_1 - \\ |\tilde{I}_2|^2 R_2 = \text{纯虚数}\end{aligned}\quad (23)$$

(结果复杂,从略),取其实部就得到:平均输入功率与平均输出功率之差提供线圈的焦耳热.当然,这一结果也可以由式(5)对时间取平均而得到.对于变压器无内阻、无漏磁且副电路无源情形,由式(14)和(21)以及式(4),可以更简单地得到

$$\begin{aligned}\tilde{U}_1^* \tilde{I}_1 = \left(1 + \frac{\tilde{Z}_2}{j\omega L_2}\right) \tilde{U}_2^* \tilde{I}_2 = \\ \tilde{U}_2^* \tilde{I}_2 + \frac{|\tilde{U}_2|^2}{j\omega L_2}\end{aligned}\quad (24)$$

故 $\tilde{U}_1^* \tilde{I}_1$ 与 $\tilde{U}_2^* \tilde{I}_2$ 的差也是纯虚数.所以,无论如何,能量守恒在平均意义上都成立.而当式(14)和(19)都成立时,则不仅平均功率相等,瞬时功率也相等.但此时任何一边的电流与电压之间仍可能有相位差.

### 4 理想变压器的定义

在以上的推理中,我们先后做了如下假定.

a:铁芯是线性介质,无铁损(磁滞和涡流).磁介质跟电介质不同之处在于:线性磁介质都跟真空没

有多大区别( $|\mu_r - 1| \ll 1$ ),而磁化效应强的介质都是非线性的铁磁质,从而在数学上不好处理.铁磁质不仅非线性,而且其磁化情况还依赖于历史(非单值),存在磁滞回线,造成能量耗散.变压器中的铁芯通常都是用磁滞回线细窄的软铁制成,从而可以忽略磁滞.但非线性特征仍然存在,这使得 $B \propto I, \Phi \propto I$ 和式(1)都不成立.故而,我们还要求介质工作时远离磁化饱和区,这样就可以近似将其视为线性介质,使得自感系数 $L$ 和互感系数 $M$ 获得意义.此外,铁芯是导体(主要是硅钢),交变磁场会在其中引起涡流和焦耳热,也造成能量耗散.用彼此绝缘的硅钢片制成铁芯,可以极大地减少涡流损耗,从而可以忽略之.

b:无漏磁.有漏磁情形在数学上可以处理,但表达式复杂[见式(9)、(10)],且连电动势的比值关系(3)都没有,更别说我们熟悉的电压比和电流比公式了.

c:线圈内阻可忽略(无铜损).此时平均输入功率等于平均输出功率.

d:两线圈自感(铁芯磁导率)很大,感抗趋于无穷[见式(15)和(17)].此时,空载电流[见式(20)~(22)]可忽略.

这4个条件的重要性依次递减.条件a是基础,没有它本文中除能量守恒外其他结论皆不成立.只在专门的电工学中才研究非线性和铁损问题.条件a使得我们可以用比较简单的数学来处理问题,尤其是使得方程(1)成立.仅靠这一条,我们已经得到了结果(9)、(10)和等效替换公式(11)、(12),只是不够简单而已.条件b为进一步简化结果提供了很大便利,而如果只考虑条件a,c的话,结果得不到多少简化.由前3个条件可以得到电压比公式(6)和(14),而由所有4个条件才得到电流比公式(19)和等效替换公式的常见形式(16)和(18).

而且,条件a,b只跟变压器自身情况有关,而条件c,d则有赖于外在情况.比如,副线圈短路时条件c不成立,断路时条件d不成立.所以把条件c,d当成对变压器的要求多少有些奇怪,更合适的说法是对“变压器处于理想状态”的要求.所以条件c,d应该排在a,b之后.

那么,什么是理想变压器?大学教材<sup>[1~3]</sup>对其的定义普遍包括了以上4条,只是顺序各异,未按重要性排列.故综合来说,满足上述4个条件的变压器称为理想变压器,其常用性质是电压比公式(14)、电流比公式(19)和等效替换公式(16)和(18).

另外要说明的是,本文标题中的“线性条件”包含两层意思:线圈包围的介质是线性的;交流电路中的所有元件都是线性的.例如欧姆定律的成立就意味着该元件是线性的.如果电路中含二极管,那么本文从第二部分开始的所有讨论都不成立(但第一部分仍成立).

## 5 对中学物理教材处理理想变压器问题的建议

中学教材是如何处理理想变压器的呢?教材[4]和[5]给出的定义都是没有能量损失(线圈铜损、铁芯铁损)的变压器,但它们又都出现了电压比公式.显然,该定义中只涉及条件a,c,而电压比公式的成立还需条件b.这是二者的一个缺憾.

至于电流比公式(19),教材[5]认为可以由“输入功率与输出功率相等”推出(这可能也是很多人的观点).然而我们已经看到,只要内阻为零,就有 $\bar{P}_1 = \bar{P}_2$ [见式(23)~(24)],但此时式(19)却不成立.究其原因,这是直接套用直流电功率公式 $P = UI$ 所致,未注意到交流电情形下功率是变化的,而平均功率要考虑电压和电流的相位差: $\bar{P} = UI \cos \varphi = \text{Re}(\tilde{U} \tilde{I}^*)$ .此时 $UI$ 只是视在功率.由(平均)功率平衡只能得到 $U_1 I_1 \cos \varphi_1 = U_2 I_2 \cos \varphi_2$ ,故而即使电压比公式成立也得不到电流比公式.

教材[4]倒是没有直接出现电流比公式,但在习题中显然无法回避.此时它谨慎地指出“以下各题都不考虑电感和电容的影响”.其言下之意就是:此时按直流电的功率公式处理.但“不考虑电感的影响”跟线圈自感很大的要求不矛盾吗?由于高中阶段只能用直流公式 $P = UI$ 来处理交流电的平均功率 $\bar{P}$ ,而这种做法只有在两边的功率因数 $\cos \varphi$ 都约等于1时才是可行的,故而我们研究电压和电流的相位差.

为比较相位,可计算 $\frac{\tilde{U}}{\tilde{I}}$ .把条件b,c,d代入式

(9)、(10),可以发现 $\frac{\tilde{U}_1}{\tilde{I}_1}$ 和 $\frac{\tilde{U}_2}{\tilde{I}_2}$ 的表达式复杂,无法得

到 $\cos \varphi \approx 1$ .但加上 $\tilde{E}_2 = 0$ ,则马上得到[参见式(16)]

$$\frac{\tilde{U}_1}{\tilde{I}_1} \approx \frac{N_1^2}{N_2^2} \tilde{Z}_2 \quad \frac{\tilde{U}_2}{\tilde{I}_2} = \tilde{Z}_2$$

故只要进一步要求副电路中的负载近似为电阻性的,则变压器任一边的电压和电流就可以视为同步,从而可以直接套用直流电功率公式.数下来,达到该结论用到了6个条件.也就是说,为了使公式 $\bar{P} = UI$ 成立,需要条件a~d以及副电路无源且其负载为电阻性.由此可知,所谓“不考虑电感和电容的影响”,指的是负载;变压器的两线圈仍必须视为电感非常大.

与此相关的一个误解是:空载时变压器中有空载电流 $I_{10}$ ,故此时功率 $U_1 I_{10} \neq 0$ ,这是因为变压器存在铜损、铁损,需要消耗能量.作为实际变压器,能量损耗当然是空载电流存在的原因之一,但本文式(20)~(22)的得到都是以无能量损耗为前提.也就是说,假定条件a,c后就已经无能量损耗了,但照样存在空载电流.此时的真正解释是:虽然 $U_1 I_{10} \neq 0$ ,但它不是功率;功率是 $U_1 I_{10} \cos \varphi$ .把 $|\tilde{Z}_2| \rightarrow \infty$ 和 $R_1 = R_2 = 0$ 代入式(9),可得

$$\tilde{U}_1 = \frac{j\omega L_1 \tilde{E}_1}{\tilde{Z}_1 + j\omega L_1} = j\omega L_1 \tilde{I}_{10}$$

[见式(20)].从另一角度看,空载时副电路电流为零,互感不起作用,于是原线圈作为纯电感元件当然满足上式.所以, $U_1, I_{10}$ 之间的相位差是 $\frac{\pi}{2}$ ,故功率为零,仍然功率平衡,根本不存在能量损耗.

交流电和理想变压器是一项高考内容<sup>[6]</sup>.2016年全国高考理综I卷第16题就考查了理想变压器的知识<sup>[7]</sup>.文献[8]对该题进行了详尽分析,其中用到了电压比和电流比公式(或等效替换公式).然而,题干中说的是“理想变压器”,而根据高中教材,“理想变压器”只是符合条件a,c而已,其逻辑推论只是式(9)、(10)或(11)、(12)(令 $R_1 = R_2 = 0$ ).这显然不是出题者的本意.题目显然希望考察学生对电压比

和电流比公式的掌握,然而二者的其他前提b和d是独立于a和c的.

因此,建议中学教材在该方面考虑再周全一些.出于可接受性的考虑,不宜在教材中出现“线性介质”和“感抗趋于无穷”等字眼,故而可以把无能量损耗(条件a的一部分和条件c)、无漏磁(条件b)、电压比公式(条件a,b,c的推论)、电流比公式(条件a,b,c,d的推论)这4条作为理想变压器的定义,并指出电流比公式不是功率平衡的推论,而是一个独立要求.这“新四条”仍可视为是完备的.还有一点是,要回避副电路中有交流电源、或者有电容、电感作为负载的情形,这样才可以大胆使用公式 $\bar{P} = UI$ .

也许会有意见说,高中教材中的“无能量损失”条件包括了无漏磁,因为有漏磁时变压器外会有变化的磁场,导致电磁波向外辐射能量.这一说法不能说错,但它跟在日常问题中考虑相对论效应一样没有什么意义.实际上,这一辐射的能量极小,因为变压器的尺度远小于相应的波长,从而完全应该视为似稳电路<sup>[1]</sup>.如果要在条件a之前再加一条的话,那就是:电路是似稳的,从而不考虑电磁波辐射.这是理所当然被默认而无需指明的,人们只会去谈论铁损、铜损,不会提及电磁波,正如讨论化学反应中的质量是否守恒时不会去计较爱因斯坦质能关系一样.

### 参考文献

- 1 梁灿彬,等.普通物理学教程·电磁学(第三版).北京:高等教育出版社,2012.362~363,399~402
- 2 赵凯华,等.新概念物理教程·电磁学(第二版).北京:高等教育出版社,2006.365
- 3 贾起民,等.电磁学(第二版).北京:高等教育出版社,2001.502~503
- 4 张维善,张颖,刘彬生,等.普通高中课程标准试验教科书物理(选修3-2)(第3版).北京:人民教育出版社,2010.41~49
- 5 普通高中课程标准实验教科书物理(选修3-2)(粤教版)广州:广东教育出版社,2005.57
- 6 教育部考试中心.2016年普通高等学校招生全国统一考试大纲的说明(理科).北京:高等教育出版社,2016.285
- 7 2016年全国普通高等学校招生统一考试理科综合能力测试试卷,2016
- 8 唐王雅斌.从2016年高考新课标I第16题谈“等效电阻法”的应用.物理通报,2017(1):103~105