

学生创新园地

# 阳光下相靠近的影子形变现象的讨论

陈楚天

[宁波市效实中学高三(2)班 浙江 宁波 315012]

(收稿日期:2018-04-12)

**摘要:**从几何光学出发,对阳光下相靠近的影子的形变现象进行了理论分析,指出这是一物进入另一物的半影区造成的,并与实际情况相比较,较好地解释了这一现象.

**关键字:**阳光 影子 形变 几何光学

阳光明媚的日子,如果仔细观察,便会发现一种有趣的现象:当一个影子很靠近另一个影子的时候,会发现其中一个影子发生形变(如图1所示,书角的影子发生明显的形变),并以比相离较远时更快的趋势接近另一个影子.主要表现如下:

(1) 这种有趣的现象在影子相距很近(即将相接)时才会发生(图1,仅很靠近窗框影的书影的角发生了这一现象).

(2) 此时,物移动相同距离,影子移动距离显著大于相距较远时.

(3) 若影子边线不互相平行,还将伴有明显形变(图1,书影的角部发生形变,明显偏离直角).

(4) 离屏近的物的影改变较大,离屏远的物的影几乎不变(图1,窗框影观察不到明显形变).

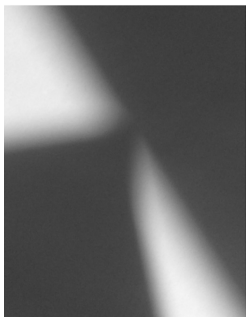


图1 书的直角影子(图中左侧影子)靠近窗框的直边影子(图中右侧影子)的情形.其中书离屏近,窗框离屏远  
这一现象早已有人注意,但鲜有人给出正确分

析.流行的解释有两种:

一是认为衍射使然.然而阳光的相干性并不太好,且阳光并非单色光,若是衍射使然,则不免发生色散,而实际观察中屏上阳光只是整体变暗,并无色散.故仍应从几何光学入手来解释.

二是认为半影叠加使然.诚然,两个物的半影交叠区是会变暗.但这一现象出现在我们所讨论的现象出现之前,不在本文讨论范围之内.我们观察到并将在下文予以讨论的是整个影区特别是全暗区域的扭曲变形,而非半影交叠区的简单变暗(这并不能造成全暗区的变化).另外,此解释也无法说明上面提到的(4)中体现出的不对称性.

其实如仔细观察,更能发现这一现象的另一表现:

(5) 在本文所讨论现象发生的同时可以观察到离屏近的物上有离屏远的物的影.

仅就这表现我们就可以判断,这一现象是一物进入另一物的半影区所造成的,由此也可解释(4)中所体现出的不对称性.

下面我们作具体分析.

现约定:

(1) 称日心到地表某点的连线为阳光光轴,由于日地距离极大,对该点附近的点,光轴方向可视为不变.

(2) 阳光可视为由多组平行光组成,它们相对

指导教师:袁张瑾(1978-),女,中教高级,主要从事高中物理教学及物理竞赛的辅导工作.

光轴有旋转对称性. 将阳光与光轴的夹角记为  $\theta$ . 记阳光中与光轴夹角最大者夹角为  $\theta_0$ , 此即太阳对地半张角.

(3) 阳光完全照不到的区域称为全暗区, 其边界称为全暗线.

并进行以下理想化处理:

(1) 遮挡物为两个不透光且足够大的半平面  $\alpha$  和  $\beta$ ;

(2)  $\alpha$  和  $\beta$  与光屏平面  $\gamma$  平行, 与  $\gamma$  间距分别为  $a$  和  $b(a > b)$ ;

(3) 阳光正入射, 即光轴垂直于  $\gamma$ .

为解决这一问题, 我们诚然可以计算  $\gamma$  上的光强分布, 但计算繁复而无必要, 我们只须考察全暗线的形状即可.

情形 I,  $\alpha$  和  $\beta$  边线平行时, 设参数如图 2 所示.

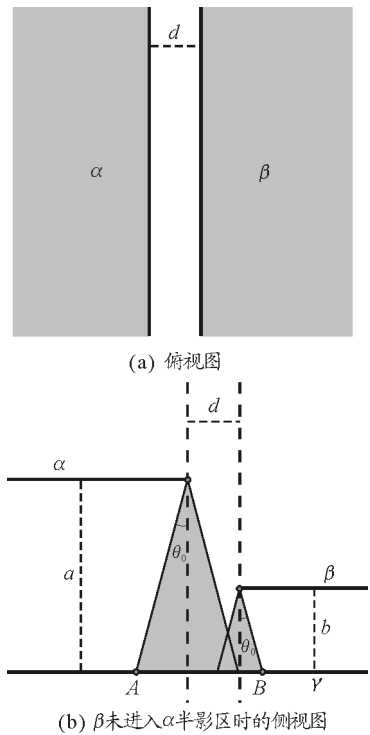


图2 情形 I

当  $\beta$  未进入  $\alpha$  的半影区, 即  $d > (a - b)\tan \theta_0$  时, 容易画出其本影、半影区, 不难得出  $A$  左与  $B$  右为全暗区,  $\gamma$  上影为  $\alpha$  和  $\beta$  二者影的简单相加, 容易得到

$$\overline{AB} = d + (a + b)\tan \theta_0 \tag{1}$$

$$\Delta \overline{AB} = \Delta d \tag{2}$$

其中  $\overline{\Delta AB}$  为两个半平面水平距离改变  $\Delta d$  时  $\overline{AB}$  的改变量, 可以表征全暗区相较物体的变化趋势. 此时为正常情形.

而当  $\beta$  进入  $\alpha$  的半影区, 即  $d < (a - b)\tan \theta_0$  时, 如图 3 所示, 可以发现光线 \* 成为极限光线,  $A$  左侧,  $B'$  右侧即成全暗区.

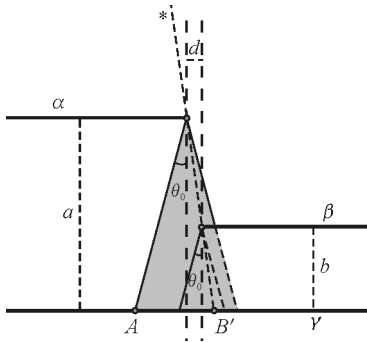


图3  $\beta$  进入  $\alpha$  半影区后的侧视图

由图示几何关系有

$$\overline{AB'} = a\tan \theta_0 + \frac{da}{a - b} \tag{3}$$

$$\Delta \overline{AB'} = \frac{a}{a - b}\Delta d > \Delta d \tag{4}$$

即变化趋势变大. 同时我们发现  $A$  相对  $\alpha$  位置并不改变, 故(1)、(2)、(4) 即得解释.

情形 II,  $\alpha$  和  $\beta$  边线成  $\delta$  角时 [ $\delta \in (0, \pi)$ ], 设参数如图 4 所示.

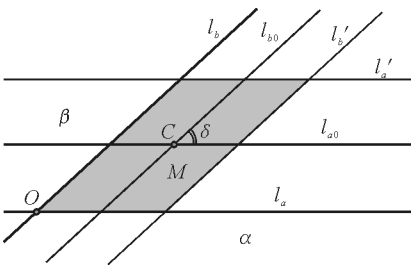


图4 情形 II,  $\gamma$  面上投影图

记不考虑相互影响时  $\alpha$  和  $\beta$  的本影线为  $l_a$  和  $l_b$ ,  $l_a \cap l_b = O$ ; 半影线 (即全亮区和有影区的交线) 为  $l'_a$  和  $l'_b$ ; 边线在  $\gamma$  面上的投影为  $l_{a0}$  和  $l_{b0}$ ,  $l_{a0} \cap l_{b0} = C$ . 易知  $l_{a0}$  与  $l_a$  和  $l'_a$  间距为  $a \tan \theta_0$ ,  $l_{b0}$  与  $l_b$  和  $l'_b$  间距为  $b \tan \theta_0$ .

之前已经说明, 影区变化是由一个物体进入另一个物体的影区产生的, 故额外的全暗区一定在两个物体半影区的交叠区  $M$  区 (即图中阴影区域) 内.

为得到较精确的结果,我们考察  $M$  区内的一点,该点可用它到  $l_{a0}$  和  $l_{b0}$  的距离  $x, y$  (点在  $l'_a$  与  $l_{a0}$  间  $x$  为负,在  $l_{a0}$  与  $l_a$  间  $x$  为正;在  $l'_b$  与  $l_{b0}$  间  $y$  为负,在  $l_{b0}$  与  $l_b$  间  $y$  为正) 来唯一表示,记为  $(x, y)$ .

设一与光轴夹角为  $\theta [\theta \in (0, \theta_0)]$ , 在  $\gamma$  面上投影与  $l_a$  夹角为  $\varphi$  的光线  $n$  能照到该点上,则  $n$  与  $\alpha, \beta$  所在平面的交点必在半径分别为  $a \tan \theta, b \tan \theta$  的圆周上. 为使  $n$  不被  $\alpha, \beta$  遮挡,其交点必在  $\alpha, \beta$  边线之外.

将所有图形投影到  $\gamma$  面上,则得图 5.

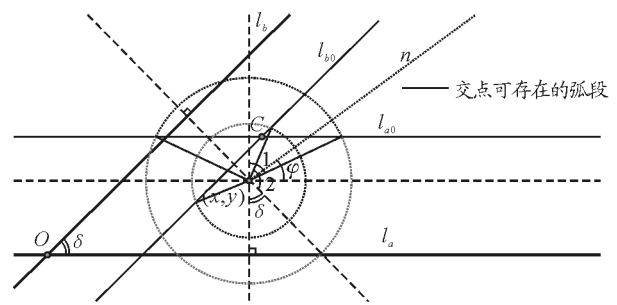


图 5 将所有图形投影到  $\gamma$  面上得到的图形

由几何关系

$$\angle 1 = \arccos \frac{x}{a \tan \theta} \quad \angle 2 = \arccos \frac{y}{b \tan \theta} \tag{5}$$

同时为使  $n$  可存在,应有角度关系

$$\angle 1 + \angle 2 > \pi - \delta \tag{6}$$

故有

$$\arccos \frac{x}{a \tan \theta} + \arccos \frac{y}{b \tan \theta} \geq \pi - \delta \tag{7}$$

式(7)表示的是一片包含  $C$  点即  $(0, 0)$  点的区域(亮区),记该区域为  $\Omega_{(\theta)}$ ,其边界为椭圆的一部分.可知  $\Omega_{(\theta)}$  相互关于  $C$  点位似,位似比为  $\tan \theta$ .

可知  $\theta$  取最大值  $\theta_0$  时,  $\Omega_{(\theta)}$  范围最大,故全暗线方程为

$$\arccos \frac{x}{a \tan \theta_0} + \arccos \frac{y}{b \tan \theta_0} = \pi - \delta \tag{8}$$

也可对式(8)两侧取余弦并移项平方,即可表达为另一形式

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 2 \frac{xy}{ab} \cos \delta = \tan^2 \theta_0 \sin^2 \delta \\ \arccos \frac{x}{a \tan \theta_0} + \arccos \frac{y}{b \tan \theta_0} \leq \pi \end{cases} \tag{9} \tag{10}$$

式(9)表现的是一个以  $C$  为中心的与  $l_a, l_b$  相切于  $A, B$  的椭圆.因受式(10)的限制,只能取  $A$  和  $B$  间部分,这与直接用式(8)作图结果相同.记此结果表示的全暗线为  $E$ .

按式(9)可算得  $A$  和  $B$  与  $O$  距离分别为  $b \tan \theta_0 (\csc \delta + \cot \delta), a \tan \theta_0 (\csc \delta + \cot \delta)$ ,并可使用 MATLAB 作出不同条件下曲线  $E$  的图,如图 6 所示.(为使我们能对角度大小有一直观感受,下文  $\delta$  在呈现时都改为采用角度制.)

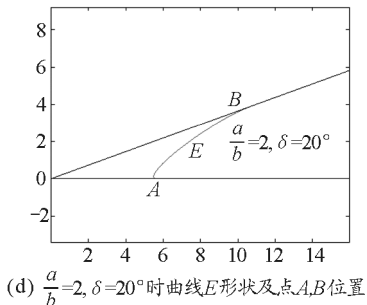
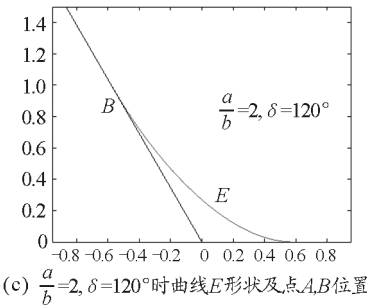
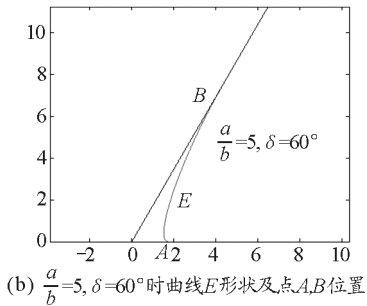
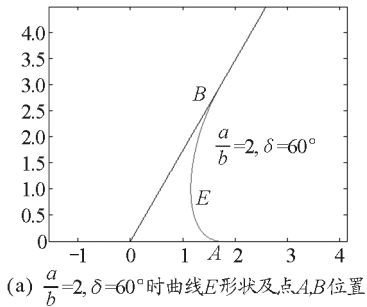


图 6

$E$  表示的全暗区带有明显的扭曲形变,这与平行情况下的线性关系全然不同. $E$  对  $a, b$  有一定对称性,即  $\alpha$  的影也发生了部分形变,此形变随  $\frac{a}{b}$  增大而相对减小.

最后,将理论计算得的  $E$  与实际拍摄结果进行比较.图 7 和图 8 所示为不同条件下实拍、曲线  $E$  的理论计算以及计算结果和分层设色(将灰度值一定范围内的像素改赋一定的颜色)后的实拍图比较的情况.

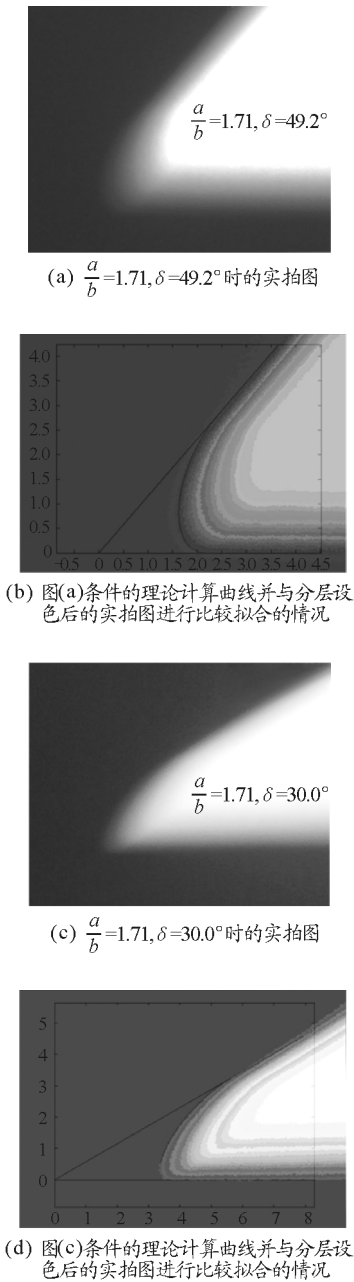


图 7

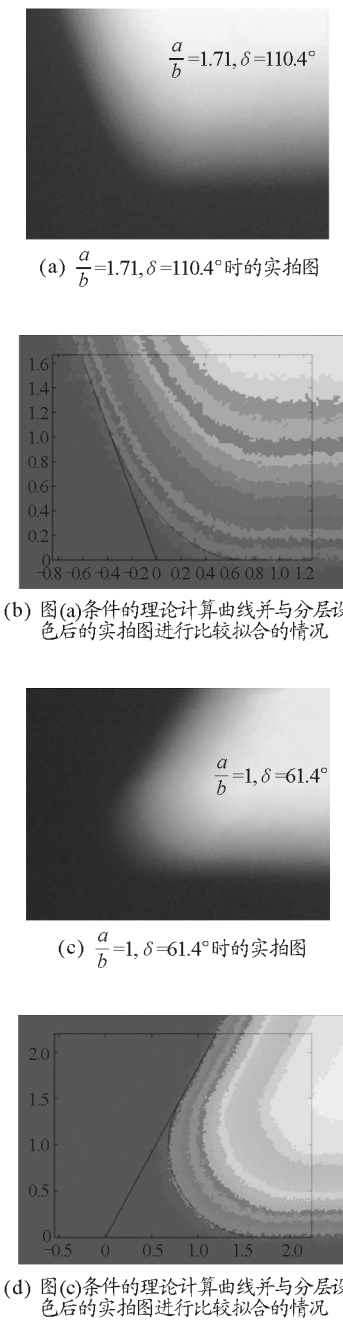


图 8

可以发现,拍摄图片和理论计算的拟合程度非常好,同时  $a=b$  的极限情况下, $E$  为一段圆弧,和我们日常经验相符;这更验证了本模型的正确性.

至此,所有现象均得到了解释.

