

行星做椭圆轨道运动周期和能量的证明

张海利 侯 恕

(东北师范大学物理学院 吉林 长春 130024)

(收稿日期:2018-05-30)

摘要:高中很多同学对行星做椭圆轨道运动的周期和能量的证明很感兴趣,希望了解它的来龙去脉,但是高中课本里没有证明过程,虽然大学课本里有完整的证明过程,但是使用了微积分,本文的目的就是在不使用大学微积分的前提下,用高中物理知识对行星做椭圆轨道运动的周期和能量进行完整的证明。

关键词:高中物理 椭圆轨道 周期 能量

1 问题引出

德国天文学家开普勒在1609年发现了开普勒第一和第二定律。开普勒第一定律内容是:所有行星绕太阳运动的轨道都是椭圆,太阳处在椭圆的一个焦点上;开普勒第二定律内容是:行星和太阳的连线在相等的时间间隔内扫过相等的面积。经过10年,在1619年发现了开普勒第三定律。开普勒第三定律内容是:所有行星轨道的半长轴的三次方与它的公转周期的二次方的比值都相等,即 $\frac{a^3}{T^2}=k$,比值 k 是一个对所有行星都相同的常量。高中物理没有对开普勒第三定律进行完整的证明,也没有对行星的能量进行证明。高中很多同学对行星做椭圆轨道运动的周期和能量的证明很感兴趣,虽然大学课本里有完整的证明过程,但是使用了微积分,本文的目的就是在不使用大学微积分的前提下,用高中的物理知识对行星做椭圆轨道运动的周期和能量进行完整的证明^[1]。

在本文的推导中需要引入角动量的知识,角动量是描述物体转动状态的物理量,角动量是参考点到质点的位置矢量与质点动量的叉乘,是矢量。角动量的方向一定垂直于位置矢量与质点的动量所构成的平面,表达式为 $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times m\mathbf{v}$,大小为 $L=m v_{\tau} r$,其中

L 是行星角动量的大小, v_{τ} 是垂直于径向方向的速度, r 是行星到太阳之间的距离^[2]。

2 公式推导

行星在太阳引力作用下沿椭圆轨道运动,轨道如图1所示,行星和太阳的连线在相等的时间间隔内扫过的面积相等。

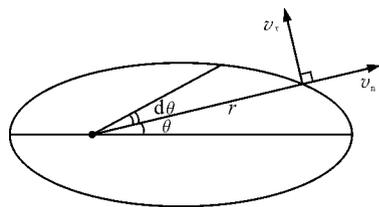


图1 行星角动量沿椭圆轨道运动

设行星的质量为 m ,行星到太阳之间的距离为 r ,其在 dt 时间内扫过的面积为

$$dS = \frac{1}{2} d\theta \cdot r^2 = \frac{1}{2} dt \cdot \omega r^2 = \frac{1}{2} dt \cdot v_{\tau} r$$

单位时间内扫过的面积为

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} v_{\tau} r = \frac{m v_{\tau} r}{2m} = \frac{L}{2m} = \text{恒量} \quad (1)$$

式中 L 为行星角动量的大小。

如图2所示, A 和 B 分别为行星的远日点和近日点, v_1 和 v_2 分别表示在远日点和近日点的速度,下面对行星做椭圆轨道运动的周期和能量做一证明。

作者简介:张海利(1989-),男,硕士研究生,研究方向物理学科教学。

指导教师:侯恕(1965-),女,博士,副教授,硕士研究生导师,研究方向中学物理学科教学。

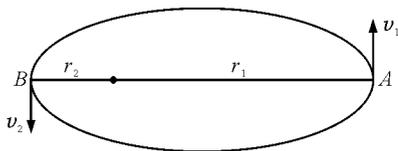


图2 远日点和近日点及其速度

由图2中的几何关系可知

$$r_1 = a + c \quad r_2 = a - c$$

其中

$$r_1 + r_2 = 2a$$

$$r_1 \cdot r_2 = a^2 - c^2 = b^2 \quad (2)$$

行星运动总机械能 E 等于其动能与势能之和, 设行星到太阳之间的距离为 r , 角动量的大小为 L , 近日点和远日点的机械能和角动量可表示为

$$E = -G \frac{Mm}{r} + \frac{1}{2} mv^2 \quad (3)$$

$$L = mvr \quad (4)$$

将式(4)代入式(3)得

$$E = -G \frac{Mm}{r} + \frac{1}{2} m \left(\frac{L}{mr} \right)^2 \quad (5)$$

对式(5)变形得

$$Er^2 + GMmr - \frac{L^2}{2m} = 0 \quad (6)$$

r_1 和 r_2 为方程(6)的解, 结合式(2)并由韦达定理有^[3]

$$r_1 + r_2 = -G \frac{Mm}{E} = 2a \quad (7)$$

$$r_1 \cdot r_2 = -\frac{L^2}{2mE} = b^2 \quad (8)$$

由式(7)推得

$$E = -G \frac{Mm}{2a} \quad (9)$$

由式(8)推得

$$L = b\sqrt{-2mE} \quad (10)$$

由式(1)推得行星运动的周期为

$$T = \frac{\pi ab}{\frac{dS}{dt}} = \frac{\pi ab}{\frac{L}{2m}} = \frac{\pi ab \cdot 2m}{L} \quad (11)$$

式中 πab 为椭圆的面积.

将式(9)及式(10)代入式(11)得到

$$T = \frac{\pi ab \cdot 2m}{L} = \frac{\pi ab \cdot 2m}{b\sqrt{-2mE}} = \frac{\pi ab \cdot 2m}{b\sqrt{-2m\left(-G \frac{Mm}{2a}\right)}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM}} \quad (12)$$

由式(12)可得

$$k = \frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

则行星做椭圆轨道运动的周期和能量为

$$E = -G \frac{Mm}{2a} \quad T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM}}$$

其中 M 是太阳的质量, G 是引力常数, a 是半长轴.

行星做椭圆轨道运动周期和能量的公式在解决问题中有很大的用处, 下面的典型问题就是公式的实际应用.

3 解题应用

3.1 典型问题 1

要发射一颗人造地球卫星, 使它在半径为 r_2 的预定轨道上绕地球做匀速圆周运动, 为此先将卫星发射到半径为 r_1 的近地暂行轨道上绕地球做匀速圆周运动. 如图3所示, 在 A 点, 实际使卫星速度增加, 从而使卫星进入一个椭圆的转移轨道上, 当卫星到达转移轨道的远地点 B 时, 再次改变卫星速度, 使它进入预定轨道运行, 试求在椭圆轨道上 A 点, B 点的速度和卫星从 A 点到达 B 点所需的时间, 设万有引力恒量为 G , 地球质量为 M .

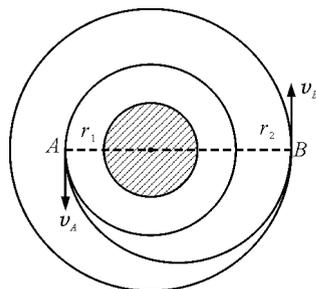


图3 典型问题1题图

分析: 以 v_A 和 v_B 分别表示卫星在椭圆轨道上 A 点和 B 点的速度, 在椭圆轨道上 A 点和 B 点的机械能等于动能和势能之和, 根据推导出的行星能量的公式列式, 有

$$\text{A 点} \quad -G \frac{Mm}{r_1 + r_2} = \frac{1}{2} mv_A^2 - G \frac{Mm}{r_1}$$

$$\text{B 点} \quad -G \frac{Mm}{r_1 + r_2} = \frac{1}{2} mv_B^2 - G \frac{Mm}{r_2}$$

$$\text{解得} \quad v_A = \sqrt{\frac{2GMr_2}{r_1(r_1 + r_2)}}$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2GMr_1}{r_2(r_1 + r_2)}}$$

卫星做椭圆轨道运动的周期

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM}} \quad a = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

则卫星从 A 点运动到 B 点所需时间

$$t = \frac{1}{2}T = \frac{\pi(r_1 + r_2)}{2} \sqrt{\frac{r_1 + r_2}{2GM}}$$

3.2 典型问题 2

从赤道上 C 点发射洲际导弹,使之精确地击中北极点 N,要求发射所用的能量最少.假定地球是一质量均匀分布的半径为 R 的球体, $R=6\,400\text{ km}$.若不考虑地球的自转,则最小发射速度的大小为多少?

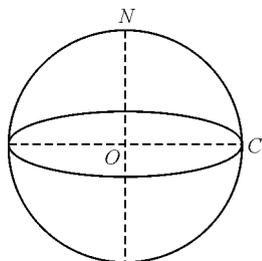


图4 典型问题2题图

分析:导弹发射后,在地球引力作用下,将沿椭圆轨道运动,如果导弹能打到 N 点,则此椭圆一定位于过地心 O、北极点 N 和赤道上的发射点 C 组成的平面内,因此导弹的发射速度(初速度 v) 必须也在此平面内,地心 O 是椭圆的一个焦点,根据对称性,注意到椭圆上的 C、N 两点到焦点 O 的距离相等,故所考察椭圆的长轴是过 O 点垂直 CN 的直线,即图 5 上的直线 AB,椭圆的另一焦点必在 AB 上,由行星的能量表达式 $E = -G\frac{Mm}{2a}$ 可知,要求发射的能量最少,即要求椭圆的半长轴 a 最短,根据椭圆的

几何性质可知,椭圆的两焦点到椭圆上任一点的距离之和为 $2a$,现 C 点到一焦点 O 的距离是定值,等于地球的半径 R,只要位于长轴上的另一焦点到 C 的距离最小,该椭圆的半长轴就最小,显然,当另一焦点位于 C 到 AB 的垂线的垂足处时,C 到该焦点的距离必最小,所以 P 为另一焦点,如图 5 所示.

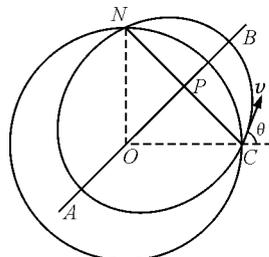


图5 几何关系分析

由几何关系可知

$$2a = R + \frac{\sqrt{2}}{2}R$$

设发射时导弹的速度为 v ,则有

$$E = -G\frac{Mm}{2a} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R}$$

$$G\frac{Mm}{R^2} = mg$$

由以上 3 式得 $v = \sqrt{2gR(\sqrt{2} - 1)}$

代入数据得 $v = 7.2\text{ km/s}$

参考文献

- 1 赵凯华.力学(第二版).北京:高等教育出版社,2004.56
- 2 张汉壮.力学(第二版).北京:高等教育出版社,2012.153
- 3 范仰才.大学物理教程(上).长春:东北师范大学出版社,2012.22

Proof on the Period and Energy of the Planet's Elliptical Orbit Movement

Zhang Haili Hou Shu

(School of physics, northeast normal university, Changchun, Jilin 130024)

Abstract: Many senior high school students are very interested in the proof of the cycle and energy of the elliptical orbit movement of planets. they want to know the cause and effect of it, but there is no proof process in senior high school textbooks. although there is a complete proof process in university textbooks, calculus is used. the purpose of this paper is to use senior high school physics knowledge to fully prove the cycle and energy of the elliptical orbit movement of planets without using university calculus.

Key words: senior high school physics; elliptical orbit; cycle; energy