

绳杆关联系统若干问题研究

崔慕添

(锦州市锦州中学 辽宁 锦州 121000)

(收稿日期:2018-07-03)

摘要:绳杆关联系统是高中物理中的典型模型,涉及多类问题.对绳杆关联系统各物理量进行了研究,比较了各类模型的特点.同时,讨论了绳杆关联系统中的速度、加速度、能量及动量问题.

关键词:绳杆关联系统 速度 加速度 能量 动量

绳杆关联系统是高中物理中常见的理想模型.该模型涉及速度、加速度、能量、动量等问题,除加速度问题外,均为高考物理重点内容.绳杆关联系统也是自主招生和物理竞赛的热点.在研究绳杆关联系统时,有两个基本假设作为研究前提:一是绳杆的重力不考虑,二是绳杆的形变量不计.

本文将研究高中物理中几个典型的绳杆关联系统模型.

模型一:如图1所示,A车用轻绳跨过光滑的定滑轮(不计滑轮的质量和摩擦)牵引B物块向上运动.在某时刻,与A车相连的轻绳与水平面夹角为 θ .

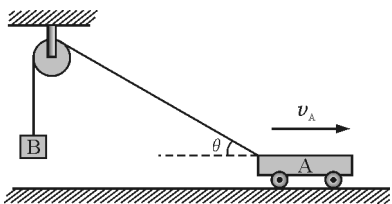


图1 模型一示意图

模型二:如图2所示,岸上的人用绕过定滑轮的不可伸长的轻绳拉小船,使小船以 v_0 匀速靠岸.某时刻绳与水平面夹角为 θ .

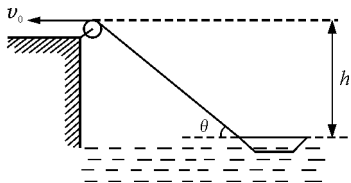


图2 模型二示意图

模型三:如图3所示,长为 L 的均匀直杆两端固

定着两个小球A和B,A球在竖直墙壁上运动,B球在水平地面上运动.某时刻,杆与竖直方向的夹角为 θ .

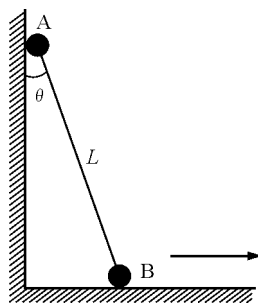


图3 模型三示意图

1 绳杆系统的速度关系

研究绳杆关联系统的速度关系时,正确判断研究对象的实际运动,分清分运动的实际效果是解决问题的关键.可以根据运动效果,选择合适的研究对象.

讨论绳杆关联系统速度问题的文章很多,这里不再重复讨论,仅给出确定绳杆关联系统速度关系的通用方法.

步骤一:对产生两个作用效果(速度与弹力不在同一直线)的物体,分解其合速度.

步骤二:利用沿绳(杆)方向速度相等,将物体的速度按照沿绳(杆)和垂直绳(杆)方向进行分解.

现根据给出的方法,对文中模型进行讨论.

对模型一,A车运动过程中产生两个效果:一是沿绳子方向拉伸绳子,二是使绳子绕定滑轮逆时针的摆动^[1].A车受到的拉力方向左上,合速度方向水平向右,两者不在同一直线,应分解A车速度.如图

作者简介:崔慕添(2001-),男,在读高中生.

指导教师:王磊(1984-),男,硕士,讲师,主要从事物理教学研究工.

4所示,将A车速度 v_A 分解成沿绳的速度 v_{A1} 与垂直于绳的速度 v_{A2} .利用沿绳方向速度相等,可得

$$v_B = v_{A1} = v_A \cos \theta$$

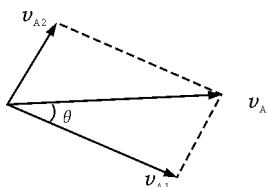


图4 A车速度分解示意图

对模型二,绳对船的拉力方向左上,船的速度水平向左,两者不在同一直线上,故对船的速度进行分解.如图5所示,利用沿绳方向速度相等,有

$$v_0 = v_{\text{船}} \cos \theta$$

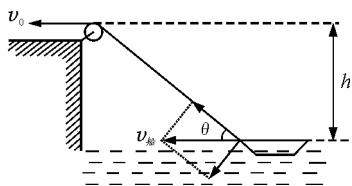


图5 船的速度分解示意图

对模型三,A球的合速度方向竖直向下,B球的合速度方向水平向右,杆对A,B两球的弹力方向与A,B两球的合速度均不在同一条直线上,故A,B两球的合速度均需分解.将 v_A 分解成沿杆的速度 v_{A1} 与垂直于杆的速度 v_{A2} ,将 v_B 分解成沿杆的速度 v_{B1} 与垂直于杆的速度 v_{B2} .如图6所示,利用沿杆方向速度相等,有 $v_{A1} = v_{B1}$,即

$$v_A \cos \theta = v_B \sin \theta$$

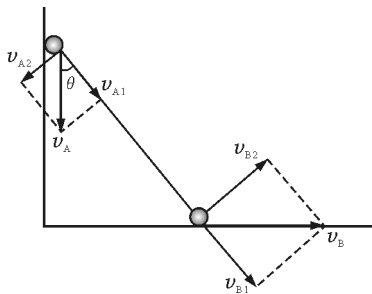


图6 A,B球速度分解示意图

2 绳杆系统的加速度关系

绳杆系统的加速度并不遵循类似于速度分解那样的关系.下面,通过对3个典型模型的具体讨论加以说明.

对于模型一,如图7所示,A车的第一个分运动产生两个加速度,分别为切向加速度 a_τ 和向心加速

度 a_n ;A车的第二个分运动产生径向加速度 a_r [2].如图8所示, a_A 可沿着绳方向和垂直于绳方向分解,两个方向的分量分别为 $a_A \cos \theta$ 和 $a_A \sin \theta$ [3].因此,有

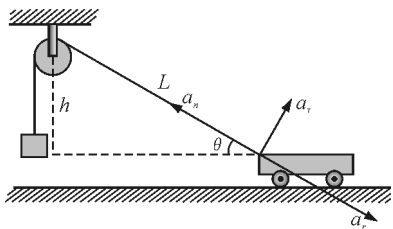


图7 A车第一个分运动加速度分解示意图

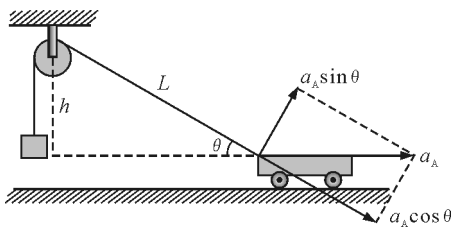


图8 A车第二个分运动加速度分解示意图

$$a_A \cos \theta = a_r - a_n$$

$$a_A \sin \theta = a_\tau$$

B物体的运动方向沿绳,故其加速度

$$a_B = a_r = a_A \cos \theta + a_n$$

$$\text{又 } a_n = \frac{v_2^2}{l}, l = \frac{h}{\sin \theta}, v_2 = v_A \sin \theta$$

联立各式,可得

$$a_n = \frac{v_A^2 \sin^3 \theta}{h}$$

即A车与B物体间的加速度关系满足

$$a_B = a_A \cos \theta + \frac{v_A^2 \sin^3 \theta}{h}$$

对于模型二,以河岸为参考系,绳与定滑轮相切处为坐标原点,建立如图9所示的坐标系[4].

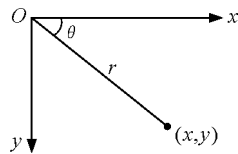


图9 模型二建立的坐标系

取 r 和 θ 为参量,则船的坐标可以表示为

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

其中, x, r, θ 均是时间 t 的变量.

因小船水平向左运动,故有 $y = h$.上述两式等号两边同时对时间 t 求导,并联立各式,可得

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{v_0}{\cos \theta} \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0 \tan \theta}{r}$$

由上述两式得,小船的加速度

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{v_0 \tan^3 \theta}{h}$$

其中,负号表示船的加速度方向沿 x 轴负方向.

对于模型三,以 B 球为参考系, A 球绕 B 球做逆时针的圆周运动^[2]. 如图 10 所示.

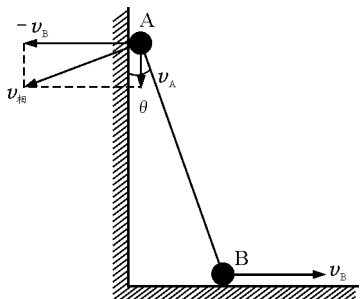


图 10 以 B 球为参考系, A 球运动分解示意图

规定向右为正方向,设 A 球相对于 B 球转动的速度为 $v_{\text{相}}$. 根据运动效果,可将 $v_{\text{相}}$ 分解为 v_A 和 $-v_B$ 两个互相垂直的分量. 因此,相对速度大小

$$v_{\text{相}} = \frac{v_B}{\cos \theta}$$

设 a_A 和 $-a_B$ 分别为 v_A 和 $-v_B$ 产生的加速度,它们产生合加速度 $a_{\text{相}}$. $a_{\text{相}}$ 具有沿杆和垂直杆两个效果,加速度分别为 a_n 和 a_τ , 如图 11 所示.

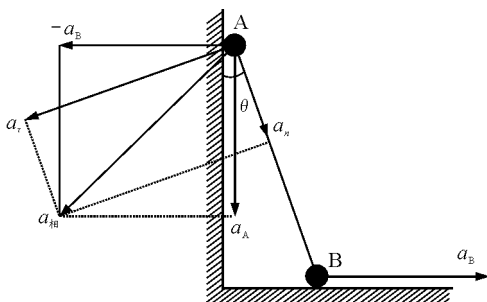


图 11 以 B 球为参考系, A 球加速度分解示意图

$$a_n = a_A \cos \theta - a_B \sin \theta$$

$$a_n = \frac{v_{\text{相}}^2}{L}$$

可求出, a_A 和 a_B 之间满足

$$a_A = a_B \tan \theta + \frac{v_B^2}{L \cos^2 \theta}$$

通过对上面 3 种典型模型的讨论可知,影响绳杆关联系统加速度的因素包括两方面:一是关联系统中物体的速度,二是关联系统中物体间的距离. 需要强调一点,绳杆关联系统中不存在“沿杆方向加速度相等”的关系.

3 绳杆系统的能量与动量问题

在判别绳杆系统速度关系、位置变化等问题中,由于经常与能量、动量问题相联系,综合性非常强.

下面给出一道典型例题,并以此总结此类问题的求解方法.

【例 1】如图 12 所示,将质量为 $2m$ 的重物悬挂在轻绳的一端,轻绳的另一端系一质量为 m 的环,环套在竖直固定的光滑直杆上,光滑定滑轮与直杆的距离为 d . 杆上的 A 点与定滑轮等高,杆上的 B 点在 A 点正下方距离为 d 处. 现将环从 A 处由静止释放,不计一切摩擦阻力,求:

- (1) 环到达 B 处时,重物上升的高度 h ;
- (2) 若环到达 B 处时速度大小为 v ,求此时重物速度大小 $v_{\text{物}}$;
- (3) 环从 A 处静止释放到 B 处过程中,环克服轻绳拉力做的功 W ;
- (4) 环从 A 处静止释放到 B 处过程中,绳对环拉力的冲量大小 I ;
- (5) 环能下降的最大高度 H .

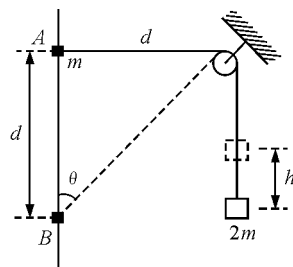


图 12 例 1 题图

解析: 环释放后,重物由静止开始先加速上升后减速上升到最高点. 环和重物组成的系统机械能守恒.

- (1) 根据几何关系有,环从 A 下滑至 B 点时,下降的高度为 d ,则重物上升的高度

$$h = \sqrt{2}d - d = (\sqrt{2} - 1)d$$

- (2) 环到达 B 处时,在沿绳子方向上的分速度等于重物的速度,有

$$v \cos 45^\circ = v_{\text{物}}$$

环和重物组成的系统机械能守恒,则有

$$mgd - 2mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}2mv_{\text{物}}^2$$

联立各式,解得

随位移均匀变化的磁场中电磁感应规律的初探

甘恒一 胡安 汤辰旭 姜付锦

(黄陂区第一中学 湖北 武汉 430030)

(收稿日期:2018-05-25)

摘要:先分析了3个在随位移均匀变化的磁场中导体线框感应电动势的计算问题,发现了感应电动势与导体线框的面积有关,最后通过微元法证明了:在这种磁场中导体线框匀速直线运动时产生的感应电动势与其面积成正比.

关键词:随位移均匀变化的磁场 闭合导体线框 感应电动势

1 题目

如图1所示,在第一象限内存在垂直纸面向外的磁场,磁感应强度 $B = B_0 + kx$, ($B_0 > 0, k > 0$ 且都是常数), x 为某点到 y 轴的距离,有一个边长为 L 的正方形导体线框 $ABCD$ 沿 x 轴从原点以速度 v_0 匀速运动,求导体线框中产生的感应电动势 E .

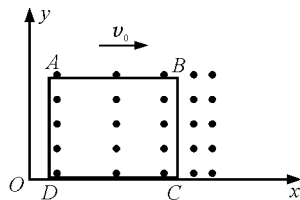


图1 题目题图

设 AD 所在位置坐标为 x_D , BC 边所在位置为

$$v = \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})gd} \quad v_{物} = \frac{\sqrt{(6 - 4\sqrt{2})gd}}{2}$$

(3) 环从 A 运动到 B 的过程中,对环运用动能定理,有

$$mgd - W = \frac{1}{2}mv^2 - 0$$

联立各式,解得

$$W = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{4}mgd$$

(4) 规定向下为正方向,环从 A 运动到 B 的过程中,因绳对环拉力的冲量不在竖直方向上,运用动量定理非常麻烦.因此,对重物、环与重物组成的系统分别应用动量定理.

对重物运用动量定理,有

$$2mgt - I = 2m(-v_{物}) - 0$$

对环与重物组成的系统运用动量定理,有

$$mgt + 2mgt = mv + 2m(-v_{物})$$

联立各式,解得

$$I = \frac{2}{3}m\sqrt{gd}$$

(5) 环下降到最大高度 H 时,环和重物的速度

均为零.此时重物上升的最大高度为 $\sqrt{H^2 + d^2} - d$.根据系统的机械能守恒定律,有

$$mgH = 2mg(\sqrt{H^2 + d^2} - d)$$

解得

$$H = \frac{4}{3}d$$

解决绳杆系统能量、动量问题应注意以下几个方面:一是明确系统机械能守恒定律成立的条件,合理使用整体法与隔离法,正确使用动量定理;二是两关联物体的速度大小关系,把握住沿绳或杆方向速度相等;三是明确各物体高度变化关系,相关联的物体高度变化不一定相等.

参考文献

- 陈晓宇.巧用平动非惯性系解决高中物理力学问题.物理通报,2013(7):108~109
- 程贤楼.也谈绳、杆牵连模型中的加速度.中学物理,2013,31(3):71~73
- 王志成.绳连体加速度关系的讨论.物理通报,2008(6):63~64
- 何述平.绳—船模型的教学研究.物理通报,2016(3):29~33