长直交变电流磁场中圆线圈的感应电动势和感应电流

邹俊峻

（长安大学汽车学院　陕西 西安　710064）

（收稿日期:2018－09－11）

摘　要:旨在计算长直交变电流在共面圆形线圈中产生的感应电动势和感应电流.利用磁场的安培环路定理、法拉第电磁感应定律等物理原理,以及残数定理、一阶线性非齐次微分方程等高等数学知识,详细推导了导线与线圈圆心之间的距离大于线圈半径时圆形线圈中产生的感应电动势和感应电流,并得到了他们的解析表达式.望本文可以为教师和同学们提供一些有用的参考,有利于同学们更好地掌握感应电动势和感应电流的求解方法以及高等数学知识的运算.

关键词:长直交变电流　圆形线圈　感应电动势　感应电流

在大学物理教材中,利用法拉第电磁感应定律求解变化磁场中导体线圈上的感应电动势的例子很多,如长直交变电流磁场中矩形线圈上的感应电动势,变化的均匀磁场中矩形线圈和圆形线圈上的感应电动势[1~3].但是,对于长直交变电流磁场中圆形线圈上的电磁感应问题,很少有人求解过.在本文中,利用磁场的安培环路定理、法拉第电磁感应定律和高等数学知识,对这个问题进行了讨论,计算了导线与线圈圆心之间的距离大于线圈半径时线圈中的感应电动势和感应电流.

1　圆线圈中的感应电动势

如图1所示,已知无限长直导线 AB 中通有交变电流 $i(t)=I_0\sin\omega t$,半径为 R 的平面圆形线圈与长直导线 AB 共面,导线与线圈圆心之间的距离为 d,且有 $d>R$.线圈处在导线 AB 的右边,线圈平面内磁场非均均分布,但方向总是相同.建立如图所示坐标系,在 (r,θ) 处取面积元 $\mathrm{d}S=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$,由安培环路定理可得:长直交变电流 $i(t)$ 在 $\mathrm{d}S$ 处所产生的磁感应强度大小为

$$B(t)=\frac{\mu_0 i(t)}{2\pi(d+r\cos\theta)} \tag{1}$$

方向垂直纸面向里.穿过 $\mathrm{d}S$ 的磁通为

$$\mathrm{d}\Phi=B(t)\mathrm{d}S=\frac{\mu_0 i(t)}{2\pi(d+r\cos\theta)}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{2}$$

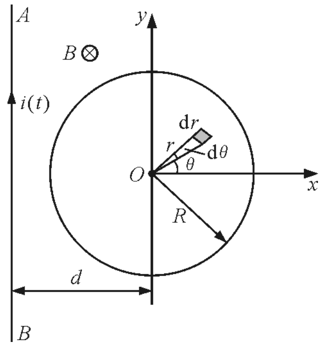

图 1　圆形线圈平面的磁通($d>R$)

则穿过圆形线圈的总磁通为

$$\Phi=\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 i(t)}{2\pi(d+r\cos\theta)}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r=$$
$$\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 r i(t)}{2\pi d}\frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \tag{3}$$

其中 $\varepsilon=\dfrac{r}{d}<1$,令

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

作者简介:邹俊峻(1997－　),男,在读本科生.

指导教师:杨富社(1963－　),男,副教授,主要研究方向是无损检测和交通工程.

利用残数定理[4] 可以求解函数 I 的积分,令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,得

$$I=\int_{|z|=1}\frac{1}{1+\varepsilon\frac{z+z^{-1}}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}=$$

$$\frac{2}{\mathrm{i}\varepsilon}\int_{|z|=1}\frac{1}{z^2+\frac{2}{\varepsilon}z+1}\mathrm{d}z \tag{4}$$

令
$$f(z)=\frac{1}{z^2+\frac{2}{\varepsilon}z+1}$$

且 $f(z)$ 的分母有两个一阶零点

$$z_1=-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

和
$$z_2=-\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

只有 $|z_1|<1$,所以在单位圆 $|z_1|=1$ 内只有一个一阶极点 $z_1=-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1-\varepsilon^2}$,在此极点函数 $f(z)$ 的残数[4] 为

$$\mathrm{Res}[f(z)]=\lim_{z\to z_1}\frac{1}{z-z_2}=\frac{\varepsilon}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}} \tag{5}$$

因此式(4) 的积分为

$$I=\frac{2}{\mathrm{i}\varepsilon}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}[f(z)]=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \tag{6}$$

将式(6) 代入式(3),得穿过圆形线圈平面的总磁通为

$$\Phi=\int_0^R\frac{\mu_0 r i(t)}{2\pi d}\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\mathrm{d}r=$$

$$\mu_0 i(t)\int_0^R\frac{r}{\sqrt{d^2-r^2}}\mathrm{d}r=$$

$$\mu_0 i(t)(d-\sqrt{d^2-R^2}) \tag{7}$$

由式(7) 可知:载流直线和圆线圈之间的互感系数 M 为

$$M=\frac{\Phi}{i(t)}=\mu_0(d-\sqrt{d^2-R^2}) \tag{8}$$

由此可见,互感系数 M 只与它们之间的相对位置、圆线圈的尺寸以及介质有关,与长直交变电流大小无关.

由法拉第电磁感应定律可得圆形线圈中的感应电动势为

$$E=-M\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=$$

$$-\mu_0(d-\sqrt{d^2-R^2})\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=$$

$$-\mu_0(d-\sqrt{d^2-R^2})I_0\omega\cos\omega t=$$

$$-E_{\mathrm{m}}\cos\omega t \tag{9}$$

其中 $E_{\mathrm{m}}=\mu_0 I_0\omega(d-\sqrt{d^2-R^2})$.

2　圆线圈中的感应电流

假设圆线圈的自感系数为 L,等效电阻为 r,感应电流为 $I(t)$,则圆线圈的等效电路如图 2 所示.

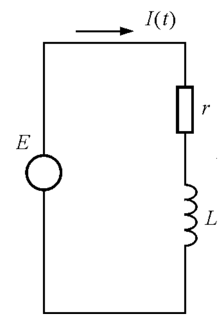

图 2　圆形线圈平面的等效电路

由欧姆定律可得

$$E=rI(t)+L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} \tag{10}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{r}{L}I(t)-\frac{E_{\mathrm{m}}}{L}\cos\omega t \tag{11}$$

式(11) 是一阶线性非齐次微分方程[5],为了求其解,先求解一阶线性齐次微分方程

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\frac{r}{L}I \tag{12}$$

得

$$I=C\mathrm{e}^{-\frac{r}{L}t} \tag{13}$$

再令

$$I(t)=C(t)\mathrm{e}^{-\frac{r}{L}t} \tag{14}$$

代入式(11),化简可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C(t)=-\frac{E_{\mathrm{m}}}{L}\mathrm{e}^{\frac{r}{L}t}\cos\omega t \tag{15}$$

利用积分公式[6]

$$\int\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\,\mathrm{d}x=\frac{\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2}\mathrm{e}^{\alpha x} \tag{16}$$

可得式(15)的解为

$$C(t)=-\frac{E_{\mathrm{m}}}{\sqrt{r^2+\omega^2L^2}}\mathrm{e}^{\frac{r}{L}t}\cos(\omega t-\theta) \tag{17}$$

其中 $\theta=\arctan\dfrac{\omega L}{r}$. 将式(17)代入式(14)即可得圆线圈中的感应电流为

$$I(t)=-\frac{E_{\mathrm{m}}}{\sqrt{r^2+\omega^2L^2}}\cos(\omega t-\theta)=$$

$$-\frac{\mu_0I_0\omega(d-\sqrt{d^2-R^2})}{\sqrt{r^2+\omega^2L^2}}\cos(\omega t-\theta) \tag{18}$$

3 结论

综上所述，本文计算了长直交变电流在共面圆形线圈中产生的感应电动势和感应电流. 利用磁场的安培环路定理、法拉第电磁感应定律等物理原理，以及残数定理、一阶线性非齐次微分方程等高等数学知识，详细推导了导线与线圈圆心之间的距离大于线圈半径时圆形线圈中产生的感应电动势和感应电流，并得到了他们的解析表达式. 希望本文可以为教师和同学们提供一些有用的参考，有利于同学们更好地掌握感应电动势和感应电流的求解方法以及高等数学知识的运算.

参考文献

1 吴百诗. 大学物理(上册)(第二次修订本). 西安：西安交通大学出版社，2004

2 程守洙，江之永. 普通物理学(2)(第 5 版). 北京：高等教育出版社，1998

3 周逊选，黄伯坚. 新编普通物理解题(修订本). 武汉：华中科技大学出版社，2001

4 四川大学高等数学教研室. 高等数学(第四册)(第 2 版). 北京：高等教育出版社，1985

5 同济大学数学教研室. 高等数学(下册). 北京：高等教育出版社，2002

6 徐利治. 现代数学手册(经典数学卷). 武汉：华中科技大学出版社，2000

Induced Electromotive Force and Induced Current of a Circular Coil in Magnetic Field of a Long Direct Alternating Current

Zou Junjun

(Chang'An University, School of Automobile, Xi'an, Shaanxi 710064)

Abstract: The purpose of this paper is to calculate the induced electromotive force and induced current of a circular coil in magnetic field of a long direct alternating current. By using the physical principles of Ampere circuital theorem and Faraday's law of lectromagnetic induction, and the mathematical knowledge of the residual number theorem and the first order linear non homogeneous differential equation, the induction electromotive force and induction current in the circular coil are derived in detail when the distance between the direct current and the coil center is bigger than the radius of the coil. And their analytical expressions are also obtained. We hope it can provide some useful reference for teachers and students, and can help students to better grasp the solution method of induction electromotive force and induction current and the use of higher mathematics knowledge.

Key words: long direct alternating current; circular coil; induced electromotive force; induced current