

自然常数 e 的指数形式与生活中物理现象的联系

李康

(苏州工业园区金鸡湖学校 江苏 苏州 215000)

(收稿日期:2018-09-20)

摘要:作为著名无理数之一的自然常数 e ,不仅在数学中发挥重要作用,还与经济学、自然界、艺术界以及建筑学等方面息息相关.从最佳加热/冷却方案、力的放大器原理、考古神器等角度,揭示自然常数 e 以指数形式与生活中的物理现象紧密联系.

关键词:自然常数 e 流水喷淋法 欧拉公式 衰变定律

众所周知,自然常数 e 是数学 3 个最著名的无理数之一.微积分的发展离不开 e ,经济学中的复利率出现了 e 的身影,就连自然界中的鹦鹉螺、羊触角、向日葵种子等,甚至浩瀚宇宙中的螺旋星云,也都发现了与 e 紧密联系的等角螺线.自古以来,等角螺线优美的外形使它成为了艺术界装饰图案的基本元素.除此以外,与 e 相关的悬链线方程的获得,使建筑学中的悬索桥至今广泛应用^[1].这些不禁让笔者联想到生活中与物理学相关的“ e ”些事.

1 最佳加热/冷却方案——流水喷淋法

【例 1】(第二十届全国中学生物理竞赛预赛第 3 题)在野外施工中,需要使质量 $m = 4.20 \text{ kg}$ 的铝合金构件升温.除了保温瓶中尚存有温度 $t = 90.0 \text{ }^\circ\text{C}$ 的 1.200 kg 的热水外,无其他热源.试提出一个操作方案,能利用这些热水使构件从温度 $t_0 = 10.0 \text{ }^\circ\text{C}$ 升温到 $66.0 \text{ }^\circ\text{C}$ 以上(含 $66.0 \text{ }^\circ\text{C}$),并通过计算验证你的方案.已知铝合金的比热容 $c = 0.880 \times 10^3 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{ }^\circ\text{C})$,水的比热容 $c_0 = 4.20 \times 10^3 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{ }^\circ\text{C})$,不计向周围环境散失的热量.

标准答案提示将保温瓶中的热水分成若干次倒到构件上,每次倒在构件上的水与构件达到热平衡后,立即将与构件接触的水倒掉.验证的计算方案并不唯一,如果等质量均分热水,只要分成 5 份就能使构件最终温度达到 $66.0 \text{ }^\circ\text{C}$.那么,对于有限的热水,构件最终温度的最大值又为多少?为了计算的方

便,假设将热水等质量分成 N 份,不考虑热损失,第 1 次混合达热平衡后,构件温度 T_1 满足

$$cm(T_1 - t_0) = c_0 \frac{m_0}{N}(t - T_1) \quad (1)$$

第 2 次混合有

$$cm(T_2 - T_1) = c_0 \frac{m_0}{N}(t - T_2) \quad (2)$$

类似的,第 i 次混合有

$$cm(T_i - T_{i-1}) = c_0 \frac{m_0}{N}(t - T_i) \quad (3)$$

式(3)可整理为

$$T_i - t = \frac{1}{1 + \frac{c_0 m_0}{cmN}}(T_{i-1} - t) \quad (4)$$

显然, $\{T_i - t\}$ 是一等比数列,由等比数列的通项公式得

$$T_i - t = (t_0 - t) \left(\frac{1}{1 + \frac{c_0 m_0}{cmN}} \right)^i \quad (5)$$

故第 N 次混合后构件的最终温度 T_N 为

$$T_N - t = (t_0 - t) \left(\frac{1}{1 + \frac{c_0 m_0}{cmN}} \right)^N \quad (6)$$

为使式(6)中最终温度 T_N 最大,由数学推导可知 N 应尽可能大,即

$$T_{N\max} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[t - (t - t_0) \left(\frac{1}{1 + \frac{c_0 m_0}{cmN}} \right)^N \right] \quad (7)$$

其中

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{c_0 m_0}{cm N}} \right)^N = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t} \right)^t \right]^{\frac{c_0 m_0}{cm}}} = e^{-\frac{c_0 m_0}{cm}} \quad (8)$$

将式(8)代入式(7)有

$$T_{N_{\max}} = t - (t - t_0) e^{-\frac{c_0 m_0}{cm}} \quad (9)$$

原本未出现在题干的自然常数 e , 却因求极限最终以指数的形式, 将最高温度 $T_{N_{\max}}$ 与初温 t, t_0 联系了起来. 利用题中数据, 可以计算出最高温度 $T_{N_{\max}} = 69.5 \text{ }^\circ\text{C}$.

可见, 铝合金构件要尽可能吸收多的热量从而升高温度, 就要将有限的热水分成无穷多份, 即将热水一滴一滴地流到构件上, 此为最佳加热方案. 生活中利用类似的方法, 将冷水以小水滴的形态喷淋在高温物体上进行冷却降温——流水喷淋法, 它不仅能高温物体表面均匀冷却, 还能保证最大程度的冷却作用, 实现快速降温.

2 力的放大器原理——欧拉公式

【例 2】(第二十七届全国中学生物理竞赛决赛第 1 题) 如图 1 所示, 在固定不动的圆柱体上绕有绳索, 绳两端挂大、小两桶, 其质量分别为 $M = 1\ 000 \text{ kg}$ 和 $m = 10 \text{ kg}$, 绳与圆柱体之间的摩擦因数 $\mu = 0.05$, 绳的质量可以忽略. 那么要使两桶静止不动, 绳至少需绕多少圈?

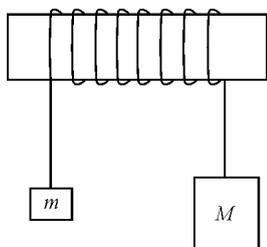


图 1 例 2 题图

取所对圆心角为 $\Delta\theta$ 的绳段微元为研究对象, 受力分析如图 2 所示. 对其列出切向和法向的平衡方程分别为

$$T_{i+1} \cos \frac{\Delta\theta}{2} = T_i \cos \frac{\Delta\theta}{2} + f_i \quad (10)$$

$$N_i = T_{i+1} \sin \frac{\Delta\theta}{2} + T_i \sin \frac{\Delta\theta}{2} \quad (11)$$

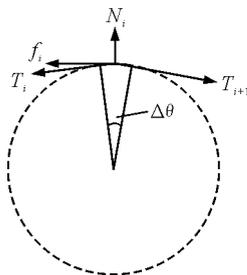


图 2 对 $\Delta\theta$ 对应的绳段受力分析

由于 $\Delta\theta$ 很小, 故

$$\cos \frac{\Delta\theta}{2} \approx 1 \quad \sin \frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{\Delta\theta}{2}$$

代入式(10)、(11)得

$$T_{i+1} = T_i + f_i \quad (12)$$

$$N_i = (T_{i+1} + T_i) \frac{\Delta\theta}{2} \quad (13)$$

当绳即将滑动时有

$$f_i = \mu N_i \quad (14)$$

联立式(12)、(13)、(14), 忽略二阶小量得

$$\frac{\Delta T}{T} = \mu \Delta\theta \quad (15)$$

对式(15)两边求和, 整理得

$$T = T_0 e^{\mu\theta} \quad (16)$$

式(16)是欧拉在 18 世纪发现的, 也叫欧拉公式, 它表明绕在圆轮(或圆柱、棒、桩)上的绳子, 可将力放大到指数 $e^{\mu\theta}$ 倍. 利用题中数据知 $\frac{T}{T_0} = \frac{M}{m} = 100$, 可得 $\theta = 92.1 \text{ rad}$, 即绕 15 圈.

当船只靠岸时, 船员可以利用绕在缆柱上多圈的缆绳, 轻而易举地控制住质量巨大的船只. 只要将绳在缆柱上多绕几圈, 余下的缆绳随意扔在船上, 绳端不必打结, 也不系在其他物体上, $e^{\mu\theta}$ 指数关系就能束缚住整艘质量巨大的船只. 生活中, 捆扎物体时将绳多绕几圈可防松脱、牧民拴马也是类似的道理. 除此之外, 传送带是靠摩擦力工作的, 常见的环形传送带如图 3 所示. 有经验的工人师傅还会采用如图 4 所示的“8”字形传送带, 它比环形传送带具有更大的 θ , 因而更不容易打滑.

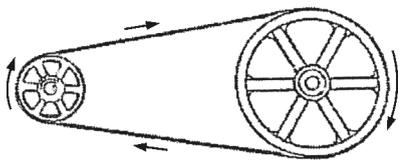


图3 常见的环形传送带

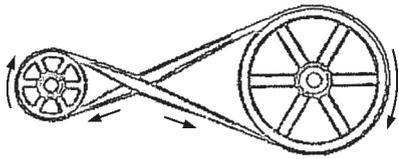


图4 “8”字形传送带

3 考古神器——衰变定律

放射性物质因衰变而减少是一个普遍规律。通过对大量原子核进行研究,发现所有的放射性同位素的原子数,随时间作负指数函数而衰减——衰变定律 $N = N_0 e^{-\lambda t}$,自然常数 e 竟然再一次以指数的形式出现在物理规律中,式中 λ 叫衰变常数,以表征放射性元素衰变的快慢。一方面,衰变定律告诉我们,

(上接第118页)
程。

第1个层次针对普通公民所需要的物理学科核心素养来设计,旨在形成基本的物理观念,具备基本的科学思维方法。这就要求教师在进行此部分教学时,注重基础,关注基本素养的培养,切忌随意拔高难度,增加深度,遵循学生的认知规律,循序渐进地展开教学。第2个层次是针对高中毕业后在理工类专业继续深造的学生设计的,此部分内容在必修课程的基础上进一步深化,具有一定的难度,这就要求教师在教学过程中考虑不同学生的实际情况,把握教学深度,以发展学生的核心素养为目标。第3个层次是为学习完选择性必修课程后还有兴趣和有能力继续学习的学生设计的,这些学生已基本具备较好的学科素养,有一定的自学能力。这就要求教师要充分调动学生的自主学习能力,帮助学生学习。

3.3 以能力发展为核心 创新课程评价

物理学习能力的发展是一个循序渐进的过程,教师在进行课程评价时要通盘考虑高中三年的物理学习过程,根据必修、选择性必修和选修课程的阶段性和层次性设计有效的评价任务。另外,学生学习课

生活中的核废料在丢弃多年之后,仍然有危险。因为它们的衰变常数 λ 很小,因而能放出 α, β, γ 等有害射线的放射性物质衰减得很慢,所以2011年日本福岛等地核电站放出的某些有害辐射会长期存在,而且永远不会消失。另一方面,考古科学家可以利用 ^{14}C , ^{18}O 等多种放射性元素,测定古文物、化石和岩石等年龄,再经过必要的修正和测算,还能进一步估测地球的年龄。

除此之外,牛顿冷却定律中也出现了类似于衰变定律的负指数函数 $e^{-\lambda t}$ 关系,这一定律的发现为鉴定死亡时间发挥了重要作用,为刑事侦查带来了方便。

综上所述,无论是从工业上的流水喷淋法,到系船缆绳的拉力,还是从古物年龄的测定,到死亡时间的鉴定,亦或是从火箭飞天的计算,到气象学中高空气压的研究,还是从含容电路的暂态过程,到统计学中的布朗运动……这些问题无一不与自然常数 e 有关。

参考文献

- 1 陈仁政. e 的密码. 北京:科学出版社,2011

程内容的目标可分为知识目标和能力目标,传统的评价方式更侧重于对知识目标的评价,而对能力的评价则显不足。教师应以主体多元,方式多样为原则,秉承发展性评价的基本理念,创新评价方式,通过课堂问答、书面评语、自我评价和同伴评价、阶段性测试等多种评价方式,从不同的视角对学生的物理学科核心素养的发展进行全面综合的评价,让日常学习评价成为学习的一部分。

此次课程结构的修订,充分体现了核心素养的发展是一个循序渐进、螺旋上升的过程。要将课程标准的思想落到实处,还需通过物理教学。我们希冀通过广大物理教育工作者的不懈努力,落实立德树人的根本任务,体现物理课程的育人功能。

参考文献

- 1 中华人民共和国教育部. 普通高中物理课程标准(实验). 北京:人民教育出版社,2003
- 2 廖伯琴. 高中物理课程结构及其功能探索——从2003版到2017版高中物理课标的变化. 物理与工程,2018,28(03):23~28
- 3 中华人民共和国教育部. 普通高中物理课程标准(2017版). 北京:人民教育出版社,2018