

Mathematica 软件支持下 等量同种电荷类电场的定量分析

董 平

(南京师范大学第二附属高级中学 江苏 扬州 211900)

(收稿日期:2018-11-01)

摘 要:介绍了在数学 Mathematica 软件支持下,利用导数和积分的方法,定量计算出等量同种电荷和均匀带电圆环的场强在特定区域的变化情况,并精确求出该区域场强的最大值及位置.并进行可视化求解,赋值绘制出场强的变化图像.

关键词:Mathematica 软件 等量同种电荷 导数 积分 定量计算

电场由于有着看不见、摸不着的抽象特点,所以教材^[1]及教师在介绍、讲解这一部分时,往往以定性分析大小关系居多,定量得出精确结果居少,使得物理这样一个原本很严谨的学科,多少留下了一些遗憾.同时,学生在学习电场时也存在诸多疑惑.笔者发现借助于数学 Mathematica 软件,利用导数和微元法(即高等数学中的“微积分”)定量计算,能够优化上述问题.

Mathematica 是美国 Wolfram 研究公司开发的符号计算系统,具有高精度的数值计算和强大的数学计算功能,Mathematica8 及更高版本新增了“自由格式语言输入”功能,不需要操作者熟悉众多的计算机编程语言和方法,更适合在中学教师和学生中推广应用.本文介绍在该软件的支持下,对等量同种电荷连线的中垂线上和均匀带电圆环轴线上的场强定量分析过程.

1 等量同种电荷连线中垂线上的场强

1.1 定性分析

真空中的两个等量同种电荷电场分布情况大致如图 1 所示,中垂线上的场强变化情况我们在教学过程中常做这样的定性分析:两电荷连线中点处场强为零,无穷远处场强也为零,其他位置场强不为零.故在中垂线上,从图 1 中 O 点开始,沿 x 轴正方向场强先增大,再减小,中间某处存在场强的最大值.然而,最大值的位置究竟在哪呢?我们可以结合图 1 作如下的定量计算.

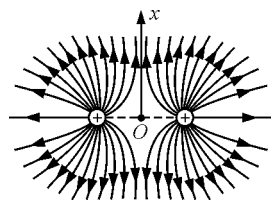


图 1 等量同种电荷电场的分布

1.2 物理建模及 Mathematica 定量计算

以两个等量带正电的点电荷为模型,如图 2 所示.

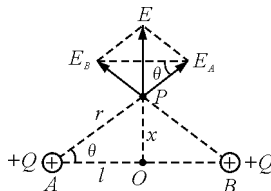


图 2 两个等量同种电荷模型

A 和 B 是两个带电荷量均 $+Q$ 的点电荷,间距为 $2l$,它们连线的中点为 O , P 点是中垂线上的任一点, AP 和 AB 的夹角为 θ .则任一点 P 处场强为

$$E = E_A \sin \theta + E_B \sin \theta =$$

$$2E_A \sin \theta = 2 \frac{kQ}{r^2} \frac{x}{r} = \frac{2kQx}{(l^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

为定量分析电荷量 Q 和间距 $2l$ 这两个参量对场强 E 的影响,使用 Manipulat(交互运行)函数,在此取 $Q \in [0, +5 \times 10^{-8} \text{ C}]$, $l \in [0, +0.2 \text{ m}]$.对函数的可视化求解是 Mathematica 最大的优点之一,为直观展示场强 E 随位置 x 的变化情况,使用 Plot(绘图)函数,可进行如下编程:

```
Manipulate[Plot[(2 * 9 * 10^(-9) * Q * x) /
```

$(1^2 + x^2)^{3/2}$, $\{x, 0, 0.1\}$, $\{Q, 0.5 \times 10^{-8}\}$, $\{-8\}$, $\{1, 0, 0.2\}$]

运行结果如图 3 所示,与前文定性分析结果一致.

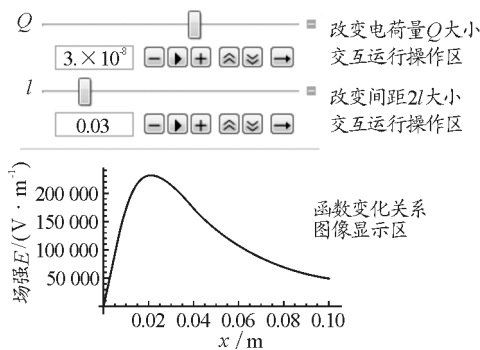


图 3 Mathematica 输出的操作区和场强变化图像

正如前文定性分析所述,场强 E 确实存在最大值.由数学知识可知,导函数为零的点即为原函数的极大值处.对式(1)求 E 关于 x 的导数并化简,由于计算过程较为复杂,在此借助于 Mathematica 软件.使用 FullSimplify(完全简化)函数和 D(给出偏导数)函数,可进行如下编程:

FullSimplify[D[2 * k * Q * x / {(1^2 + x^2)^{3/2}}, x]] (* 编程语言解释:[] 内为上述式(1) *)

运行结果为

$$E' = \frac{dE}{dx} = \frac{2kQ(l^2 - 2x^2)}{(l^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (2)$$

令式(2) $E' = 0$,解得

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}l \left(\text{另一解 } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}l \text{ 舍去} \right)^{[2,3]}$$

最大值的位置与电荷量 Q 无关,仅取决于间距 $2l$.

1.3 定量结论

综上所述,等量同种电荷连线中垂线上的场强变化如图 4 所示.

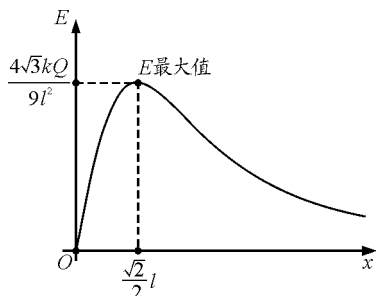


图 4 等量同种电荷连线中垂线上的场强

在 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}l$ (即 $\tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \theta = 35.264^\circ$) 处,场

强最大,且

$$E_{\max} = \frac{4\sqrt{3}kQ}{9l^2} \approx 0.770 \frac{kQ}{l^2}$$

2 均匀带电圆环轴线上的场强

2.1 物理建模及 Mathematica 定量计算

以电荷量分布均匀的金属圆环为模型如图 5 所示.圆环带电荷量为 Q ,半径为 R , O 点为圆环的圆心.因圆环不可视为点电荷,所以在此不可直接用库仑定律来分析其轴线上任一点 P 处的场强.

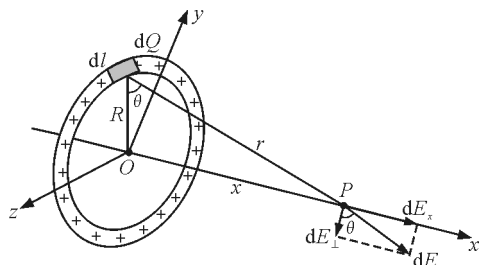


图 5 均匀带电圆环模型

建立空间坐标系,设圆环在如图 5 所示的 yOz 平面上,坐标原点与环心相重合.点 P 与环心 O 的距离为 x .因圆环电荷量分布均匀,其电荷线密度为一常量,记为 ρ ,且 $\rho = \frac{Q}{2\pi R}$.在环上取一微小线段元 dl ,该线段元的电荷元 $dQ = \rho dl$.此电荷元对点 P 处激起的场强

$$dE = \frac{k dQ}{r^2}$$

由于电荷分布的对称性,圆环上各电荷元对点 P 处激起的场强 dE 的分布也具有对称性.由图 5 可见, dE 在垂直于 x 轴方向的分量 $dE_{\perp}$ 相抵消,而沿 x 轴方向的分量 dE_x 相叠加.且

$$dE_x = dE \sin \theta = \frac{k dQ}{r^2} \frac{x}{r} = \frac{kx}{r^3} dQ = \frac{kx\rho}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dl \quad (3)$$

对这些分量累积求和有(即积分,计算复杂的积分可借助于 Mathematica 中的 Integrate 积分函数)

$$E = \int_0^{2\pi R} dE_x = \int_0^{2\pi R} \frac{kx\rho}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dl = \frac{kx\rho}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} 2\pi R = \frac{kQx}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4)$$

(下转第 76 页)

3 教学反思

(1) 制定教学目标时,要将物理核心素养目标逐一细化落实,只有这样课堂教学才能有的放矢.

依据课程目标,结合教学内容的内在逻辑,准确制定具体的教学目标,切忌对课程目标和物理核心素养的生搬硬套,而要结合教学内容的特点,正确处理知识、能力和核心素养之间的关系.

(2) 以往我们过多依赖经验,了解学生不够充分,尤其是对学生的认知规律研究得不够深入.课内不足课后补,学生要做大量的习题,苦不堪言.借助个别访谈和大样本三阶测试,我们可以充分了解学情,使精准教学成为可能.

(3) 在目标定位准确,学生起点掌握透彻的前提下,教师才有可能设计出既符合学科知识的逻辑顺序,又符合学生的认知发展规律和心理特征的教学活动.

笔者通过实践,认为比较科学有效的物理核心素养的培养路径如图 12 所示.

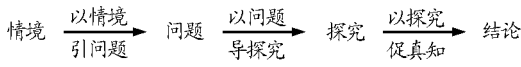


图 12 物理核心素养培养路径

教师通过创设好的物理情境,设计合理的针对学生最近发展区的问题链,引导学生进行探究活动,在活动中学生思维得以向更高层次发展,核心素养目标也逐一落实.

参考文献

1 梁旭. 指向核心素养的教学目标研制. 中学物理教学参考, 2017(4):5 ~ 6
2 郭芳侠, 陈楚琪. 三阶测试在中学物理教学的适用性研究. 考试研究, 2016(4):65 ~ 70
3 彭前程. 积极探索基于核心素养理念下的物理教学. 中学物理:高中版, 2016(3):1 ~ 2
4 黄晓标, 黄春如. 互感和自感现象的实验改进. 物理通报, 2011(10):64 ~ 65

(上接第 64 页)

取 $Q=3\times10^{-8}\text{ C}$, $R=0.1\text{ m}$, 使用 Plot(绘图)函数, 可进行如下编程:

Plot[$9\times10^9\times3\times10^{(-8)}\times\text{x}/\{(0.1^2+\text{x}^2)^{(3/2)}\}$, {x, 0, 0.3}](* 编程语言解释: [] 内为上述式(4) *)

运行结果如图 6 所示. 由式(1)、(4) 和图 4, 6 可以看出, 均匀带电圆环轴线上场强的变化情况类似于等量同种电荷. 与前文方法相同, 求出式(4) 最大

值的位置为 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}R$ ($x=-\frac{\sqrt{2}}{2}R$ 舍去).

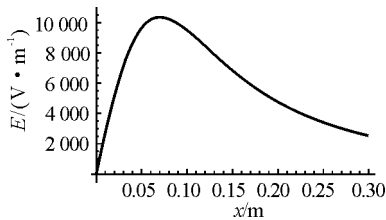


图 6 均匀带电圆环轴线上的场强

2.2 定量结论

均匀带电圆环轴线上的场强变化情况与等量同种电荷相似, 在 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}R$ (即 $\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta=35.264^\circ$)

处, 场强最大, 且

$$E_{\max}=\frac{2\sqrt{3}kQ}{9R^2}\approx0.385\frac{kQ}{R^2}$$

3 结束语

本文的导数、积分看似复杂, 可能对于我们高中物理教师而言, 略有困难. 但在 Mathematica 软件的支持下, 使得复杂的数学计算得以解决. 这对我们深入研究某些物理规律、消除学生的思维障碍有着很大的帮助. 同时在由定性分析到定量计算的过程中, 既实践了物理学科的严谨, 也提升了高中生的物理核心素养.

参考文献

1 陈熙谋, 吴祖仁. 普通高中课程标准实验教科书物理选修 3-1. 北京: 教育科学出版社, 2017. 14
2 冯建跃. 用初等数学方法求等量同种电荷中垂线上电场强度的极值. 物理教师, 2015, 36(11):56 ~ 57
3 陈一垠. 关于两等量异种电荷中垂线上场强最大值的再思考. 物理通报, 2015(6):121 ~ 122