“两线法”巧析竖直面内不脱轨问题

简伟伟

（江西省横峰中学　江西 上饶　334300）

（收稿日期：2018－11－08）

摘　要：“两线法”既可以从本质上分析竖直面内圆周运动中的诸多问题，又可以直观地找到竖直平面内不脱轨类问题中的临界点，可以达到巧妙处理该类问题的目的.

关键词：两线法　圆周运动　不脱离轨道

复合场中竖直平面内的圆周运动类题型，特别是该类问题中“不脱离轨道”类问题，因其知识联系性广、综合性强，是高中物理教学中的难点问题. 笔者从教学实践中总结出一种分析该类问题的方法——“两线法”，该法相比“等效场法”，既能究其本质、抓住关键，又通俗易懂、方便快捷.

“两线法”就是指在以圆轨道的圆心为原点，在物体运动的圆周上沿着场力的方向作出一条参考线——“场力线”，再作出一条垂直“场力线”的参考线——“压轨线”，我们利用这两条参考线方便、清晰地突破竖直平面内不脱轨类问题的解题方法.

1　模型构建 难点突破（以仅在重力场作用下为基本模型）

【例 1】 如图 1 所示，一质量为 m 的小球从半径为 R 的固定光滑圆轨道的最低点 a 点，以速度 v_0 向右运动，若它运动过程中不脱离轨道，试分析小球的运动情景.

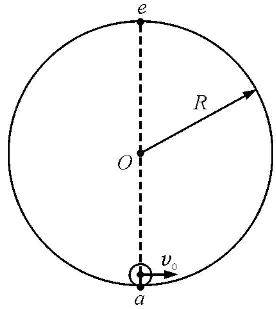

图 1　例 1 题图

1.1　“场力线”的作用

因为只有重力场，沿着场力（此处为重力）方向作出一条参考线——“场力线”，这条线可以突破以下难点问题：

（1）圆周上什么位置速度最大？什么位置速度最小？

如图 2 所示，因为只有重力做功，沿着重力方向移动，重力都要做正功则其速度就要增大，可知参考面 L_1 为沿着重力方向最低的平面，可知小球在 a 点速度最大，同理参考面 L_5 为沿着重力方向最高的平面（重力做的负功最多），可知小球在 e 点速度最小.

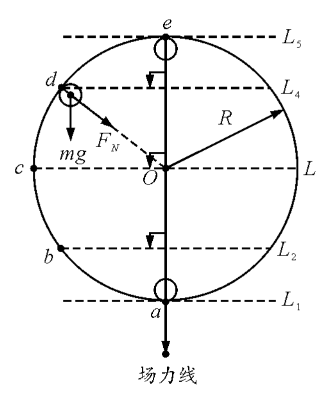

图 2　速度最大和最小点分析图

总结：圆周上“场力线”最上方的位置速度最小、最下方的位置速度最大.

（2）什么位置轨道受到的压力最大？

如图 3 所示，由上面图 2 分析可知：圆周上“场力线”最下方的位置速度最大，该位置重力全部沿径向，但背离圆心，可知该位置轨道的支持力 $F_N = mg + m\dfrac{v^2}{R}$ 为最大值.

总结：圆周上“场力线”最下方的位置轨道受到

的压力最大.

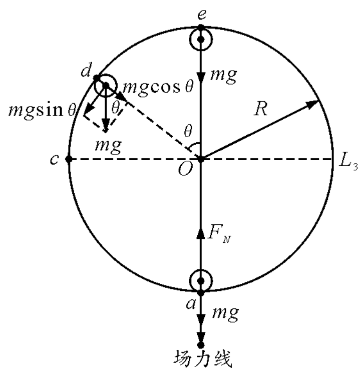

图 3　轨道受压力最大和最易脱轨点分析图

(3) 什么地方最易脱离轨道?

如图 3 所示,最小向心力为不利用轨道的弹力,仅靠重力的作用来提供向心力,由图可知在场力线上 e 点时,重力全部沿径向指向圆心提供向心力,可知该位置的最小向心力最大.由机械能能量守恒定律易知,在场力线的上方小球的速度会减小,即越向上运动越容易使得 $F_{提供的向心力} > F_{需要的向心力}$,所以 e 点是小球最易脱离轨道的位置,要使得小球做完整的圆周运动,就一定要使得小球通过 e 点[1].

总结:圆周上"场力线"最上方的位置最易脱轨(做近心运动).

1.2　"压轨线"的作用

如图 4 所示,作出一条垂直"场力线"的参考线——"压轨线",我们可知这条线将圆周一分为二,在靠近"场力线"下方的这半圆上的任何位置(如图中 b 点),由于重力沿径向的分力是使小球有紧压轨道的效果.在靠近"场力线"的上方的这半圆上的任何位置(如图中 d 点),由于重力沿径向的分力具有使小球脱离轨道的效果.因此,这条线是场力是否紧压轨道的分界线,笔者把它简称为"压轨线".利用这条线可以突破以下难点问题.

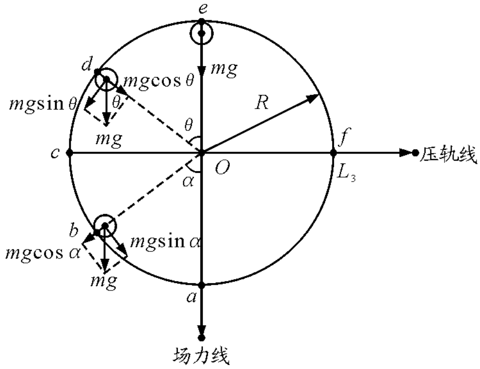

图 4　不脱轨范围和不脱轨条件分析图

(1) 小球在什么范围内运动一定不会脱轨?

通过上面的分析我们可知,在"压轨线"靠近"场力线"下方的半圆上的任何位置,即使小球速度为零,小球还是会紧贴轨道.在靠近"场力线"上方的这半圆上的任何位置,由于重力沿径向的分力是使小球脱离轨道的效果,当小球速度小于某一值(由所需的向心力决定),小球会脱离轨道而做近心运动.

总结:"压轨线"是我们分析小球速度为零时,小球是否会脱离轨道的参考线.

(2) 小球在圆周上运动时不脱离轨道要满足什么条件?

综上分析可得:小球要不脱离轨道,要么通过"场力线"的最上方的位置做完整的圆周运动,要么在"压轨线"靠近"场力线"下方的半圆上来回运动.

2　实战演练 体验功效(以重力场和电场相交汇的复合场为普遍范例)

【例 2】如图 5 所示,竖直放置的光滑圆轨道被固定在水平向右的匀强电场中,电场强度 $E=\frac{mg}{q}$,圆轨道半径为 R,在轨道的最低点 a 处有一质量为 m 带电荷量为 $+q$ 的小球(可看成质点),现给小球一水平向右的初速度 v_0,重力加速度为 g.若小球要在圆轨道上运动过程中不脱离圆轨道,则 v_0 应满足什么条件?

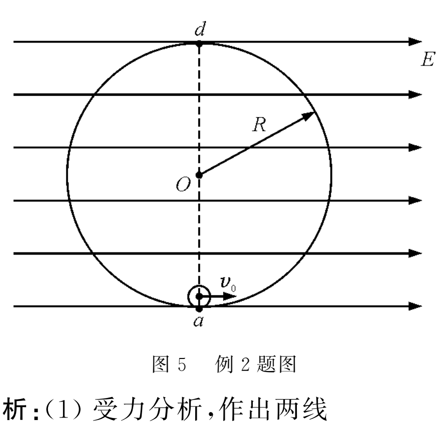

图 5　例 2 题图

分析:(1) 受力分析,作出两线

如图 6 所示,分析小球所受到的场力(重力、电场力),作出场力的合力,则该合力的方向即为"场力线"的方向,作"场力线"的垂线,即为"压轨线".

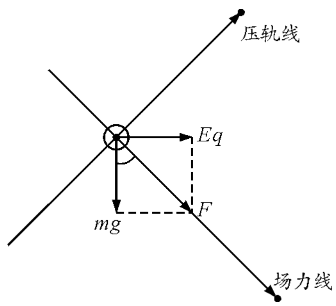

图 6 “场力线”和“压轨线”示意图

(2) 巧借两线，突破难点

如图 7 所示，我们过圆轨道的圆心，作出“场力线”和“压轨线”.

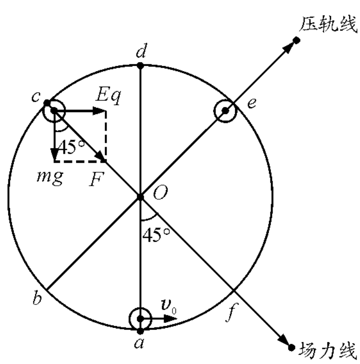

图 7 “场力线”和“压轨线”解题图

利用“两线法”原理我们知道，要使小球不脱离轨道，有两种情况：1) 在“压轨线”下部分半圆(bfe)上来回运动，临界情况为到 b 点或 e 点速度恰好为零；2) 恰好以最小的速度过 c 点，在圆周上做完整的圆周运动.

(3) 结合分析，列式求解

解：要使小球不脱离轨道有以下两种情况.

1) 在半圆(bfe)上来回运动，设其以初速度 v 运动，当其到达 e 点速度恰好为零，由动能定理得

$$EqR\cos 45^\circ - mgR(1+\sin 45^\circ) = 0 - \frac{1}{2}mv^2$$

解得

$$v = \sqrt{2gR}$$

可得：当 $v_0 \leqslant \sqrt{2gR}$ 时小球在半圆(bfe)上来回运动而不脱离轨道.

2) 小球在圆周上做完整的圆周运动，而不脱离轨道. 设以初速度 v' 运动，当其恰好通过 c 点时，有

$$\sqrt{2}\,mg = \frac{mv_c^2}{R}$$

$$-EqR\sin 45^\circ - mgR(1+\cos 45^\circ) = \frac{1}{2}mv_c^2 - \frac{1}{2}mv'^2$$

解得

$$v' = \sqrt{(3\sqrt{2}+2)gR}$$

可得：当 $v_0 \geqslant \sqrt{(3\sqrt{2}+2)gR}$ 时，小球在圆周上做完整的圆周运动而不脱离轨道.

综上所述，要使小球在圆轨道上运动过程中不脱离轨道需满足

$$v_0 \leqslant \sqrt{2gR} \text{ 或 } v_0 \geqslant \sqrt{(3\sqrt{2}+2)gR}$$

由以上对重力场和电场的普遍范例分析可以看出，利用“两线法”处理竖直平面内不脱轨类问题时，内在上可以从本质上分析各个临界点的形成因素，外在上又能以简单直观的方式告诉我们如何寻找这些临界点，可谓既究其本质，又通俗易懂.

参 考 文 献

1 简伟伟. 循序渐进层层深入 —— 以“竖直平面内的圆周运动”为例谈优生培养策略. 中学物理教学参考，2016(19)：23 ～ 25

Skillful Analysis on the Issue of Non－derailment in Vertical Plane Using *Two Line Method*

Jian Weiwei

(Hengfeng Senior High School，Shangrao，Jiangxi　334300)

Abstract：Problems of Circular motion in vertical plane can be analyzed substantially by using "Two Line Method", which is able to break though Non derailment difficulties in vertical plane conveniently and efficiently in an easily－understood way as well.

Key words：two line method；circular motion；non derailment problem