浅析带电粒子在重力和洛伦兹力作用下的运动

—— 对一道高考题的再思考

贾彦峰
（河北省井陉县第二中学　河北 石家庄　050301）
贾雅惠
（郑州轻工业大学数学与信息科学学院　河南 郑州　450002）

（收稿日期:2018-12-21）

摘　要:带电粒子在重力和洛伦兹力共同作用下的运动情况比较复杂,借助数学的帮助,通过解二阶常系数非齐次线性微分方程的方法,得到轨迹方程,最后得出粒子轨迹.

关键词:带电粒子　重力　洛伦兹力　微分方程　摆线

在笔者的脑海里总有一个问题在萦绕,只要闲下来的时候,总会琢磨它.它就是 2008 年高考江苏物理单科卷第 14 题.各种杂志刊登了许多老师的文章,对该试题从不同角度进行了评析,让笔者受益匪浅.但笔者更想知道:带电粒子在重力和洛伦兹力作用下做何种运动.尽管小球在变力作用下的运动不是高中物理探究的问题,但作为一名物理教师应该对此问题有所了解.下面是笔者对此问题的思索.

1　提出问题

【原题】(2008 年高考江苏卷第 14 题)在磁感应强度为 B 的水平匀强磁场中,一质量为 m,带正电 q 的小球在 O 点静止释放,小球的运动曲线如图 1 所示.已知此曲线在最低点的曲率半径为该点到 x 轴距离的 2 倍,重力加速度为 g.求:

(1) 小球运动到任意位置 $P(x,y)$ 的速率 v;

(2) 小球在运动过程中第一次下降的最大距离 y_m;

(3) 当在上述磁场中加一竖直向上场强为 $E\left(E>\dfrac{mg}{q}\right)$ 的匀强电场时,小球从 O 静止释放后获得的最大速率 v_m.

提出问题:由静止释放的带电小球在水平匀强磁场中做何种运动?小球运动曲线为什么如图 1 所示?此曲线是何种曲线?

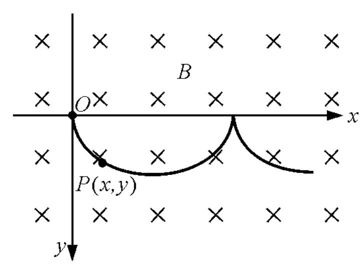

图 1　小球的运动曲线

2　探究小球运动的轨迹方程

沿水平向右方向建立 x 轴,竖直向下方向建立 y 轴,z 轴垂直纸面向里(未画出).

在磁感应强度为 B 沿 z 轴正方向的匀强磁场中,一质量为 m,带正电 q 的小球在 O 点静止释放,小球运动到位置 P 时受力如图 2 所示.

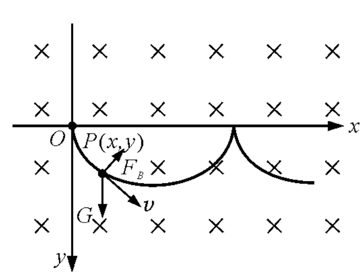

图 2　小球运动到位置 P 时受力情况

小球受力

作者简介:贾彦峰(1969-　),男,中教高级,主要研究方向是高考与习题研究.

$$\boldsymbol{F}=mg\boldsymbol{j}+q\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ v_x & v_y & 0\\ 0 & 0 & B\end{vmatrix}=qv_yB\boldsymbol{i}+(mg-qv_xB)\boldsymbol{j}$$

则小球的运动微分方程为

$$m\ddot{x}=qv_yB \tag{1}$$

$$m\ddot{y}=mg-qv_xB \tag{2}$$

$$m\ddot{z}=0 \tag{3}$$

由式(1) 得

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=qB\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

两边积分

$$\int_0^{v_x}\mathrm{d}v_x=\frac{qB}{m}\int_0^{y}\mathrm{d}y$$

得

$$v_x=\frac{qB}{m}y \tag{4}$$

式(4) 代入式(2) 整理得

$$\ddot{y}+\frac{q^2B^2}{m^2}y=g \tag{5}$$

式(5) 对应的齐次方程为

$$\ddot{y}+\frac{q^2B^2}{m^2}y=0$$

它的特征方程为

$$r^2+\frac{q^2B^2}{m^2}=0$$

其根 $r_{1,2}=\pm\frac{qB}{m}\mathrm{i}$ 为一对共轭复根,因此齐次方程的通解为

$$y=C_1\cos\frac{qB}{m}t+C_2\sin\frac{qB}{m}t$$

由于 $\lambda=0$ 不是特征方程的根,所以应设特解为

$$y^*=b_0$$

代入式(5) 得

$$b_0=\frac{m^2g}{q^2B^2}$$

非齐次方程式(5) 的通解为

$$y=C_1\cos\frac{qB}{m}t+C_2\sin\frac{qB}{m}t+\frac{m^2g}{q^2B^2} \tag{6}$$

把 $t=0$ 时,$y=0$,$\dot{y}=0$ 代入得

$$C_1=-\frac{m^2g}{q^2B^2}\qquad C_2=0$$

代入式(6) 得

$$y=\frac{m^2g}{q^2B^2}\left(1-\cos\frac{qB}{m}t\right) \tag{7}$$

式(7) 代入式(4) 得

$$v_x=\frac{mg}{qB}\left(1-\cos\frac{qB}{m}t\right)$$

两边积分得

$$x=\frac{m^2g}{q^2B^2}\left(\frac{qB}{m}t-\sin\frac{qB}{m}t\right)+C$$

把 $t=0$ 时,$x=0$ 代入,得 $C=0$,则

$$x=\frac{m^2g}{q^2B^2}\left(\frac{qB}{m}t-\sin\frac{qB}{m}t\right) \tag{8}$$

设　$R=\frac{m^2g}{q^2B^2}\qquad\omega=\frac{qB}{m}\qquad\theta=\omega t$

则式(7)、(8) 可写作

$$y=R(1-\cos\theta) \tag{9}$$

$$x=R(\theta-\sin\theta) \tag{10}$$

由式(3) 及初始条件得 $z=0$.

至此,我们得到了小球的轨迹方程.那么小球的轨迹到底是怎样的曲线呢?

3　摆线的运动方程

摆线(cycloid) 是数学中众多的迷人曲线之一.它是这样定义的:一个圆沿一直线缓慢地滚动,则圆上一固定点所经过的轨迹称为摆线,又称圆滚线、旋轮线.

以圆上定点的初始位置为坐标原点,定直线为 x 轴.当圆滚动 t 角以后,圆上定点从 O 点位置到达 P 点位置.当圆滚动一周,即 t 从零变动 2π 时,动圆上定点描画出摆线的第 1 拱.再向前滚动一周,动圆上定点描画出第 2 拱,继续滚动,可得第 3 拱,第 4 拱 ……,所有这些拱的形状都是完全相同的,每一拱的拱高为 $2a$(即圆的直径),拱宽为 $2\pi a$(即圆的周长),如图 3 所示.

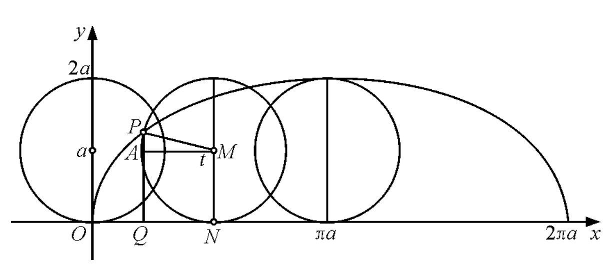

图 3　摆线

摆线的方程为

$$x = a(t - \sin t)$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

其中 a 为圆的半径，t 是圆的半径所经过的弧度(滚动角).

4 结论

由以上讨论可知，小球在重力和竖直平面内的洛伦兹力共同作用下的运动轨迹为摆线. 如果把重力换成电场力，可以用同样的方法讨论，得出带电粒子在电场力和洛伦兹力共同作用下的轨迹方程.

参 考 文 献

1 同济大学数学教研室. 高等数学(第 2 版). 北京：高等教育出版社，1982

2 佘守宪，唐莹. 浅析物理学中的旋轮线（摆线). 大学物理，2001，20 (4)：5 ～ 10

3 佘守宪，唐莹. 重力场和正交均匀电场中的旋轮线(摆线). 物理与工程，2001，11(6)：12 ～ 18

A Brief Analysis on the Motion of Charged Particles under the Action of Gravity and Lorentz Force

——A Second Thought on a College Entrance Examination Question

Jia Yanfeng

(The Second Middle School of JingXing County，Shijiazhuang，Hebei 050301)

Jia Yahui

(College of Mathematics and Information Science，Zhengzhou University of Light Industry，Zhengzhou，Henan 450002)

Abstract：The motion of charged particles under the combined acton of gravity and Lorentzian forces is compliceated . With the help of matheamtical method ，by solving the second order ，nonhomogeneous linear differential equation with constant coefficients，we get the equaton of the trajectory . Finally，the particle trajectory is work out.

Key words：charged particles；gravity；Lorentz forces；differential equation；cycloid

(上接第 113 页)

Visual Interactive Dynamic Simulation of Standing Wave Based on Mathematica

Wei Limei

(Rizhao Experimental High School of Shandong，Rizhao，Shandong 276826)

Abstract：Based on the visualization and interactive technology of mathematical software Mathematica for scientific research，physical scenes of wave superposition and standing wave formation were displayed dynamically and interactively. The display process is vivid and intuitive. It is suitable for presentation in the classroom. It can improve the teaching efficiency and effectiveness，and enhance the enthusiasm of students in learning.

Key words：Mathematica；standing wave；interactive