简捷计算无限长直电流对共面圆电流的安培力

隆　勇　王胜华　李　力
（重庆市清华中学　重庆　400054）

（收稿日期：2019－01－29）

文献[1]计算了无限长直电流对共面圆电流的安培力大小，用到复分析的留数定理来处理相关定积分，计算过程繁琐冗长. 本文在对称性的基础上，回归普通积分方法，极大地简化了计算，篇幅不及原文一半.

【题目】无限长直电流 I_1 与半径为 R 的圆电流 I_2 位于同一平面上，圆心 O 到直电流的距离为 d，分别就 $d > R$，$d < R$ 两种情况，如图 1 和图 2 所示，计算圆电流所受安培力.

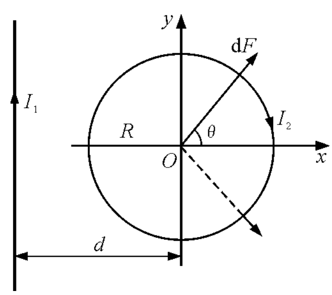

图 1　$d > R$ 时圆电流所受安培力

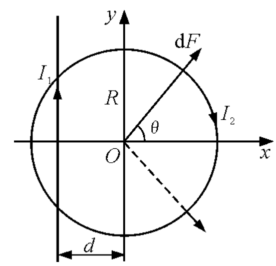

图 2　$d < R$ 时圆电流所受安培力

解析：过圆心 O 建立平面直角坐标系，其中 x 轴垂直于直电流 I_1. 在圆电流上 θ 处取微元 $R\mathrm{d}\theta$，I_1 在该处产生的磁场方向垂直纸面向里，大小为

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d + R\cos\theta)}$$

微元所受安培力方向沿半径向外，大小为

$$\mathrm{d}F = BI_2 R\mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{R\mathrm{d}\theta}{d + R\cos\theta}$$

由对称性易知：关于 x 轴对称的两微元所受安

示共振的原理时，受到启发，发明出一种基于悬臂梁共振技术的薄膜弯曲疲劳测试方法，获得国家发明专利授权[5]，利用该方法研究的成果也在国际期刊上发表[6]. 此外，教学要求深入浅出，这需要对知识有再提升和凝练的过程，需要拓展自己的视野. 教学过程使得教师对基础理论有更好掌握，客观上也会起到促进科研的作用.

4　总结

利用科研促进教学，利用教学带动科研，是现代大学发展的趋势所在. 也许我们的研究方向与教学内容并不相同，但用心去寻找二者之间千丝万缕的历史渊源与联系，就能在自己的教学中实践“科教融合”的育人理念.

参 考 文 献

1　宁长春，索郎桑姆. 以科研工作介绍的融入促进大学物理教学. 大学物理，2012，31(8)：39 ～ 43

2　李飞，李拓宇，陆国栋. 以科教融合，学科交叉提升工科人才培养质量——中国工程院岑可法院士访谈录. 高等工程教育研究，2015(4)：5 ～ 9

3　2013 诺贝尔物理奖：希格斯玻色子为什么又叫上帝粒子？https://baijiahao.baidu.com/s?id=1559478705387322&wfr=spider&for=pc

4　南方周末：中微子超光速乌龙记 http://news.sciencenet.cn/htmlnews/2012/4/262826.shtm

5　谢东，冷永祥，黄楠. 一种测试薄膜弯曲疲劳寿命的试验方法：ZL201310246825.7. 2015－04－15

6　Dong Xie, Haihua Wang, Rajesh Ganesan, et al. Fatigue durability and corrosion resistance of TiO2 films on CoCrMo alloy under cyclic deformation. Surface and Coatings Technology, 2015, 275: 252 ～ 259

培力的 y 分量相互抵消，而其 x 分量等大且与 x 轴正方向同向，故只需算出上半圆周上各电流元所受安培力的 x 分量之和的 2 倍即可.

$$F=F_x=2\int_0^{\pi}\cos\theta\mathrm{d}F=$$

$$\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{R\cos\theta\mathrm{d}\theta}{d+R\cos\theta}=$$

$$\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{(d+R\cos\theta-d)\mathrm{d}\theta}{d+R\cos\theta}=$$

$$\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\left(\pi-d\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{d+R\cos\theta}\right)\tag{1}$$

以下分别就 $d>R$，$d<R$ 两种情况，计算积分

$$A=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{d+R\cos\theta}$$ [2]

当 $d>R$ 时，有

$$d+R\cos\theta=$$

$$d\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+R\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)=$$

$$(d+R)\cos^2\frac{\theta}{2}+(d-R)\sin^2\frac{\theta}{2}=$$

$$(d-R)\cos^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{d+R}{d-R}+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$A=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(d-R)\cos^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{d+R}{d-R}+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)}=$$

$$\frac{2}{d-R}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\tan\frac{\theta}{2}}{\left(\sqrt{\frac{d+R}{d-R}}\right)^2+\tan^2\frac{\theta}{2}}=$$

$$\frac{2}{\sqrt{d^2-R^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{d-R}{d+R}}\tan\frac{\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$\frac{\pi}{2}\frac{2}{\sqrt{d^2-R^2}}-0=$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{d^2-R^2}}$$

于是当 $d>R$ 时，代入式(1) 得到

$$F=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\left(\pi-\frac{d\pi}{\sqrt{d^2-R^2}}\right)=$$

$$\mu_0 I_1 I_2\left(1-\frac{d}{\sqrt{d^2-R^2}}\right)\tag{2}$$

容易看出结果为负值，表示安培力方向沿 x 轴负向，从物理上看，这是直线电流 I_1 离左半圆周较右半圆周近，故对左半圆周电流的吸引力大于右半圆周电流的排斥力的缘故.

当 $d<R$ 时，有

$$d+R\cos\theta=$$

$$d\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+R\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)=$$

$$(R+d)\cos^2\frac{\theta}{2}-(R-d)\sin^2\frac{\theta}{2}=$$

$$(R-d)\cos^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{R+d}{R-d}-\tan^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$A=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(R-d)\cos^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{R+d}{R-d}-\tan^2\frac{\theta}{2}\right)}=$$

$$\frac{2}{R-d}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\tan\frac{\theta}{2}}{\left(\sqrt{\frac{R+d}{R-d}}\right)^2-\tan^2\frac{\theta}{2}}=$$

$$\frac{2}{R-d}\frac{1}{2\sqrt{\frac{R+d}{R-d}}}$$

$$\left[\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{R+d}{R-d}}-\tan\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{R+d}{R-d}}+\tan\frac{\theta}{2}}\right)\mathrm{d}\tan\frac{\theta}{2}\right]=$$

$$\frac{1}{\sqrt{R^2-d^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{R+d}+\sqrt{R-d}\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{R+d}-\sqrt{R-d}\tan\frac{\theta}{2}}\right|\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$0-0=0$$

于是当 $d<R$ 时，代入式(1) 得到

$$F=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}(\pi-0)=\mu_0 I_1 I_2\tag{3}$$

结果为正值，表示安培力方向沿 x 轴正向，大小与 R 和 d 的具体数值无关，即只要 I_1 直线与 I_2 圆周相交，无论直线是否等分圆周，安培力大小皆为常量 $\mu_0 I_1 I_2$，这是很特别的地方.

上述式(2)、(3) 与文献[1] 的结果完全一致，但数学方法较为简单易懂.

参 考 文 献

1 邹俊峻. 无限长直电流对共面圆电流的安培力. 物理通报，2018(4)：6 ～ 8

2 金玉明，顾新身，毛瑞庭. 积分的方法与技巧. 合肥：中国科学技术大学出版社，2017. 63，64