关于驻波的瞬态能量传输问题的探讨

张荣利
（黄石市第十六中学　湖北 黄石　435002）
刘红日
（湖北师范大学物理与电子科学学院　湖北 黄石　435002）
（收稿日期:2019－03－11）

摘　要:驻波是两列振动方向相同、振幅相等的相干波在同一直线上沿相反方向传播时叠加所产生的特殊干涉现象.其基本特征之一是分段振动,虽然各段之间没有能量传播,但是各段内部存在瞬态的能量传播.本文以弹性横波为例分析了驻波振动过程中的瞬态能量传播过程,结合驻波的位移、能量和能流密度图,对驻波的瞬态能量传播给出了直观的解释.

关键词:驻波　能量　能量密度　能流密度

驻波是一类特殊的干涉现象.当两列频率相同、振动方向相同、振幅相等,相差恒定的波在同一直线上沿相反方向传播时就会在叠加区域产生驻波.驻波在力学、电磁学、光学等领域有重要的应用.根据维度不同,驻波可以分为一维驻波、二维驻波和三维驻波[1],根据振动的物理量不同可以分为机械驻波和电磁驻波等.驻波的主要特点是波形位置固定,相邻波节之间分段振动而总能量不变.虽然各段之间没有能量传播,但是各段内部存在瞬态能量传递.虽然关于驻波的能量问题已经有很多研究[2,3],但是关于驻波内部瞬态能量传播的讨论较少[4].以机械驻波为例,瞬态能量传播与波线上质元的位移以及能量变化直接相关.只有从质元的位移和形变出发对驻波能流密度进行分析才能弄清驻波瞬态能量转化和转移的机理.本文以一维机械横波形成的驻波为例,通过驻波中质元的位移、能量和能流密度的图像,再结合形变与弹性势能的关系,对驻波内部瞬态能量传播给出了直观分析,并分析了能流产生的机理,得到的结果有助于形象直观理解驻波内部能量传播.

1　驻波的波形 能量和能流密度

以横波为例,设角频率为 ω,波幅为 A 的两列相干波,振动方向均沿 y 轴,沿 x 轴向相反方向传播,其方程为[1]

$$y_1 = A\cos\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)$$

$$y_2 = A\cos\omega\left(t+\frac{x}{v}\right) \tag{1}$$

则驻波方程为

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos\omega t\cos kx \tag{2}$$

上两式中 v 为波速,$k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ 为波数.在波线上取体积为 $\mathrm{d}V$ 的质元,其动能为

$$\mathrm{d}E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}\mathrm{d}mu^2 = \frac{1}{2}\rho\mathrm{d}Vu^2 \tag{3}$$

其中 ρ 为媒质密度,u 为质元的振动速度.由式(2),将 $u=\dfrac{\partial y}{\partial t}=-2A\omega\sin\omega t\cos kx$,代入式(3)得到

$$\mathrm{d}E_\mathrm{k} = 2\rho A^2\omega^2\mathrm{d}V\sin^2\omega t\cos^2 kx \tag{4}$$

而质元的势能为[1]

$$\mathrm{d}E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}G\mathrm{d}V\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \tag{5}$$

其中 G 为弹性介质的切变模量(横波).由式(2)对 x 求偏微分得到

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -2kA\cos\omega t\sin kx$$

代入式(5)得到

$$\mathrm{d}E_\mathrm{p} = 2G\mathrm{d}Vk^2A^2\sin^2 kx\cos^2\omega t \tag{6}$$

弹性横波的波速

$$v=\left(\frac{G}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

而 $v=\frac{\omega}{k}$,代入式(7)得到

$$G=\frac{\rho\omega^2}{k^2}$$

代入式(6)得到

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}=2\rho A^2\omega^2\mathrm{d}V\cos^2\omega t\sin^2 kx \tag{8}$$

由式(4)与式(8)得到质元的总能量

$$\mathrm{d}E=\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}+\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}=$$
$$2\rho A^2\omega^2\mathrm{d}V(\sin^2\omega t\cos^2 kx+\cos^2\omega t\sin^2 kx) \tag{9}$$

在水平向右的 x 轴上,由式(1)可得,右行波在 $\mathrm{d}V$ 质元中的能量[2]

$$\mathrm{d}E_1=\rho\mathrm{d}VA^2\omega^2\sin^2(\omega t-kx)$$

能量密度

$$\varepsilon_1=\frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}V}=\rho A^2\omega^2\sin^2(\omega t-kx)$$

能流密度

$$I_1=\varepsilon_1 v=\rho vA^2\omega^2\sin^2(\omega t-kx) \tag{10}$$

左行波在 $\mathrm{d}V$ 质元中的能量

$$\mathrm{d}E_2=\rho\mathrm{d}VA^2\omega^2\sin^2(\omega t+kx)$$

能量密度

$$\varepsilon_2=\frac{\mathrm{d}E_2}{\mathrm{d}V}=\rho A^2\omega^2\sin^2(\omega t+kx)$$

能流密度

$$I_2=-\varepsilon_2 v=-\rho vA^2\omega^2\sin^2(\omega t+kx) \tag{11}$$

上式中负号代表左行波能量传播方向沿 x 轴负向.则驻波的总能流密度

$$I=I_1+I_2=\rho vA^2\omega^2\sin^2(\omega t-kx)-$$
$$\rho vA^2\omega^2\sin^2(\omega t+kx)$$

得到

$$I=\rho vA^2\omega^2[\sin^2(\omega t-kx)-\sin^2(\omega t+kx)]=$$
$$-\rho vA^2\omega^2\sin 2kx\sin 2\omega t \tag{12}$$

因为波动沿 x 轴传播,能量也只能沿 x 轴正向或者负向传播,如果根据式(12)计算出的 I 为正值,则代表波线上某处能量沿 x 轴正向传播,反之,如果 I 为负值,则代表该处能量沿 x 轴负向传播.

2　驻波的位移 能量和能流密度瞬态分布

根据式(2)、(4)、(8)、(9)和(12),以 $\frac{T}{8}$ 为时间间隔,用 Origin 软件为作图工具,画出一个周期内驻波在 8 个时间点的能流密度、质元总能量、势能、动能和位移的分布曲线.其中 $0\sim\frac{3T}{8}$ 之间的 4 个时间点图像如图 1 所示,$\frac{T}{2}\sim\frac{7T}{8}$ 之间的 4 个时间点图像如图 2 所示.

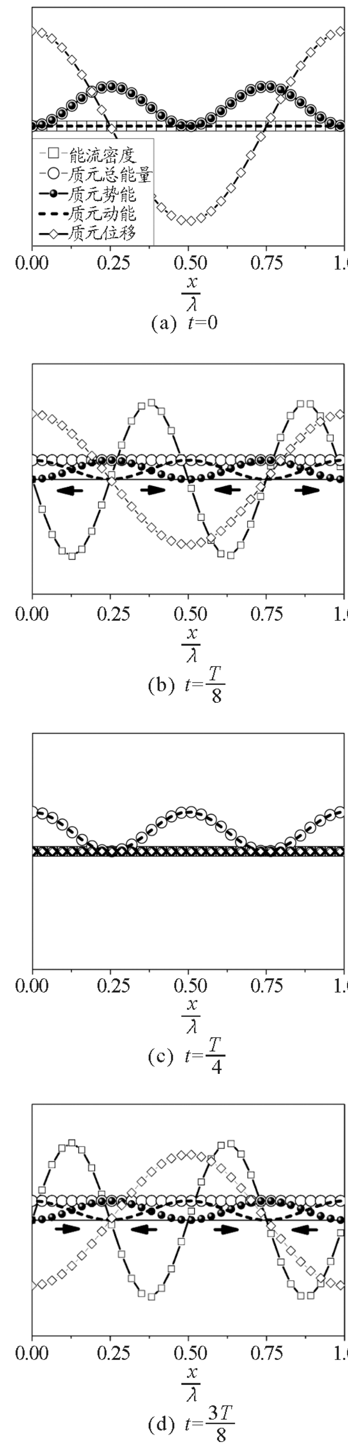

图 1　$0\sim\frac{3T}{8}$ 时间内驻波的瞬态能流图

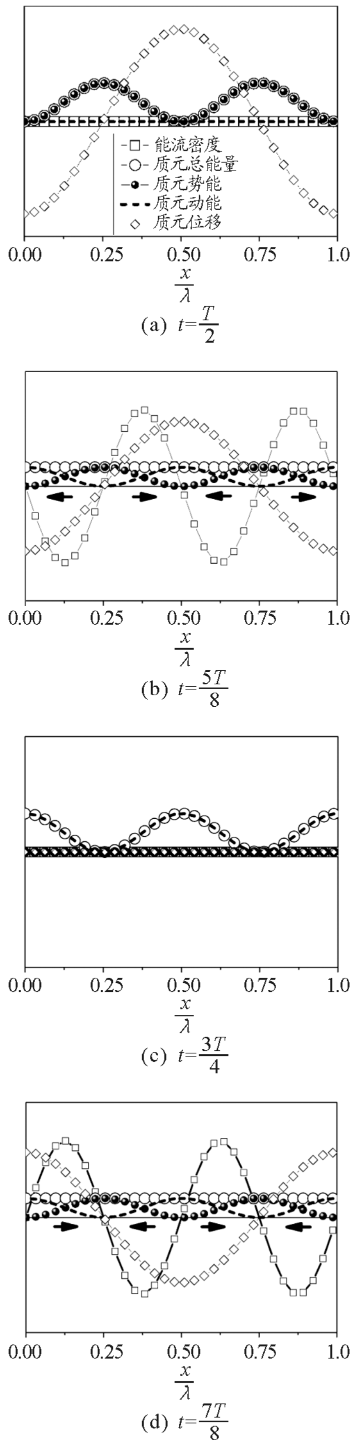

图 2　$\frac{T}{2} \sim \frac{7T}{8}$ 时间内驻波的瞬态能流图

由图 1(a) 可见，在 $t=0$ 时，驻波的波形为一余弦函数图形，波线上除了波节之外的所有质元均处于最大位置，运动速度为零，此时质元的所有能量全部为弹性势能．由图可见，波节处质元形变最大，而波腹处形变为零，因此波节处能量最大，而波腹处能量为零．同时可见此时波线上能流密度处处为零，因此 $t=0$ 时波线上无能量传播．

下一瞬时，质元由最大位置向平衡位置运动，势能转化为动能，波腹处质元动能增加，吸收能量，而波节处质元形变减小，势能减小，释放能量，能量开始由波节向波腹转移．能量流动方向如图 1(b) 所示．经过 $\frac{T}{8}$ 后，波线上各质元位移减小，振动速度增加，动能增加．波节处质元的势能与波腹处质元的动能相等，总能量沿波线均匀分布，为常量．由图 1(b) 可见，从第一个 $\frac{\lambda}{4}$ 开始，能量依次沿负向（能流密度为负）和正向（能流密度为正）传播，能量继续由波节向波腹转移．

当 $t=\frac{T}{4}$ 时，由图 1(c) 可见，所有质元振动到平衡位置，此时质元的能量全部为动能．而波腹处质元运动速度最大，因此波腹处能量密度最大．此时波线上处处能流密度为零，没有能量定向传播．下一个瞬时，质元越过平衡位置向负向运动，质元的动能开始转化弹性势能，波腹处能量减小，波节处开始发生形变，能量增加，能量开始由波腹向波节转移．

当 $t=\frac{3T}{8}$ 时，波节处的势能和波腹处的动能相等，波线上总能量处处相等，总能量在波线上均匀分布．此时能量继续由波腹向波节转移，如图 1(d) 所示．

当 $t=\frac{T}{2}$ 时，所有质元运动到最大位移，质元的能量再次全部转化为弹性势能，因为波节处形变最大，故波节处弹性势能和总能量均最大，而波腹处能量为零．如图 2(a) 所示，此时波线上能流密度处处为零，没有能量传播．下一个瞬时，质元开始由最大位移向平衡位置运动，波腹处动能增加，波节处势能减小，能量开始由波节向波腹传递．

当 $t=\frac{5T}{8}$ 时，如图 2(b) 所示，波腹处的动能等于波节处的势能，总能量沿波线均匀分布，能量继续由波节向波腹转移．

当 $t=\frac{3T}{4}$ 时,所有质元运动到平衡位置,此时波腹能量最大,而波节处形变为零,运动速度为零,能量为零.如图 2(c) 所示,此时波线上能流密度处处为零,质元间无能量传播.下一个瞬时,质元越过平衡位置继续运动,波节处质元形变增加,势能增加,总能量增加,而波腹处质元速度减小,动能和总能量减小,能量开始由波腹向波节转移.

当 $t=\frac{7T}{8}$ 时,波节处质元势能与波腹处质元动能相等,总能量沿波线均匀分布,能量继续由波腹向波节传递,如图 2(d) 所示.下一个 $\frac{T}{8}$,质元继续运动到最大位移,所有能量全部转化为势能,驻波回复到图 1(a) 所示状态,完成一次全振动.

3 讨论

由图 1 和图 2 可见,在驻波振动过程中的任何时刻,波节处能流密度始终为零,说明虽然驻波在振动过程中各段内部有能量传播,但从总体上看是分段独立振动的,各分段之间没有能量传播.

以弹性横波为例,在不考虑重力的情况下,除了所有质元均处于平衡位置的状态之外,如图 1(c) 和 2(c) 所示的状态,质元越靠近波腹形变越小,越靠近波节形变越大.当质元由最大位置向平衡位置振动时,某一质元受到相邻的离波节较近的一侧质元的切应力大于相邻的离波节较远的另一侧质元的切应力,切应力的合力指向平衡位置,做正功,将弹性势能转化为动能.而质元由平衡位置向最大位置运动时,受到的切应力的合力仍然指向平衡位置,做负功,将动能转化为弹性势能.因此弹性横波形成的驻波,能量的转化和转移要通过切应力做功来实现.

虽然驻波是分段振动的,每一段在振动过程中能量守恒,与独立谐振子有相似之处,但其中任意弹性质元的运动与独立谐振子有着本质区别.以波腹处质元为例,当其位移最大时,能量为零,处在平衡位置时能量最大,在振动过程中能量并不守恒.其他位置的质元也一样,在振动过程中部分时段吸收能量,总能量增加,部分时段释放能量,总能量减小.而独立的弹性谐振子,振动过程中总能量始终守恒.

对于波节处的质元,在振动过程中始终“不动”,其实只是质心不动.在振动过程中,波节处的质元要不断改变剪切形变大小来实现弹性势能的吸收和释放.

4 结论

(1) 一维弹性驻波,在相邻的两个波节之间存在着瞬态能量传播,能量部分时段从波腹传到波节,部分时段从波节到波腹.在传输过程中,相邻两波节之间总能量不变.

(2) 在一个周期内,存在着质元总能量沿波线均匀分布的状态,处在这些状态时,在 $\frac{\lambda}{8}$ 奇数倍的位置,质元的动能与势能相等.

(3) 当所有质元均处于平衡位置时,质元的能量全部为动能,此时波腹能量最大,波线上能流密度处处为零,局部没有能量定向传播.

(4) 当所有质元均具有最大位移时,质元能量全部为弹性势能,此时波节处质元能量最大,波线上能流密度处处为零,局部亦无能量传播.

参考文献

1 漆安慎,杜婵英.普通物理学教程 力学(第 3 版).北京:高等教育出版社,2012.326 ~ 351

2 徐宗瑜,胡小克,朱卫华.驻波的能量分析与 MATLAB 模拟.物理通报,2012(11):31 ~ 34

3 郭建军.关于驻波的能量分析.大学物理,2005,24(5):23 ~ 25

4 李春庭,鲁中健.驻波中的能量传输.物理通报,2001(5):7 ~ 8