



物理图像的“凹凸有致”^{*}

梁鸿辉

(福建省龙岩第一中学 福建 龙岩 364000)

(收稿日期:2019-05-21)

摘要:对于高中物理图像,不仅要明确物理量随相关变量的变化,更要明确其具体的变化方式,图像是“上凸”类型还是“下凹”类型由其物理本质决定,文章从多个角度对图像的“上凸”和“下凹”问题进行分析讨论。

关键词:物理图像 斜率 斜率的变化 曲线的凹凸

1 物理图像的“凹”与“凸”

图像在物理中有着重要的地位,常见物理图像的斜率、面积、截距等都可能有着特定的物理意义,这方面的高考题型研究也非常成熟了^[1]。尤其是物理图像的斜率问题,其相关的应用和注意点都被细分了,比如切线斜率和割线斜率^[2]的研究等等。但很多文献只是就题型进行归纳总结而没有深究图线为什么这样变化,或者能判断出该物理量变化的增减情况,但无法判断出增减的快慢。在分析高中物理图像问题时,我们不仅要明确该物理量在特定区域的变化是增加还是减小,还必须要明确其变化方式(图像斜率的变化快慢),也就是图像的“凹”与“凸”的问题。比如某物理量随时间不均匀减小,是减小的越来越快(上凸型)还是越来越慢(下凹型)?笔者就这方面的问题与大家做一个探讨。

2 典例精析

2.1 与弹簧振动相关的图像“凹凸”问题

高中对弹簧振子并没有太高的要求,但是很多和弹簧相关的物理图像却直接与弹簧的振动方程相关。该类图像是“凸”是“凹”很容易画错。现以2018年福州市统考为例进行分析。

【例1】如图1所示,轻质弹簧的下端固定在水平地面上,一个质量为 m 的小球(可视为质点),从距弹簧上端 h 处自由下落并压缩弹簧。若以小球下落点为 x 轴正方向起点,设小球从开始下落到压缩弹簧至最大位置为 H ,不计任何阻力,弹簧均处于弹性限度内;小球下落过程中加速度 a ,速度 v ,弹簧的弹力 F ,弹性势能 E_p 变化的图像正确的是()

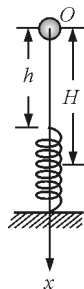
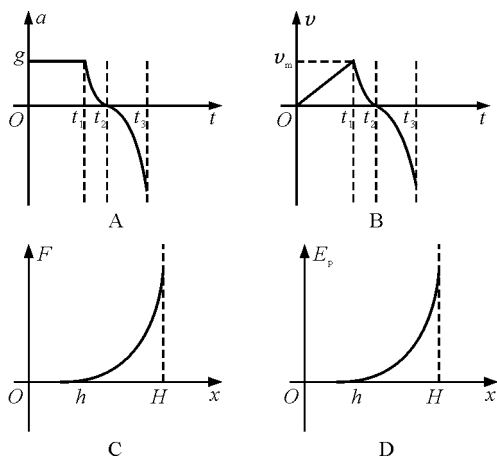


图1 例1题图



解析:本题参考答案是选项A和D,但我们认为选项A是不正确的。小球在 $0 \sim t_1$ 时间内做自由落体运动, t_1 时刻开始接触弹簧, t_2 时刻为弹簧的平衡

* 新罗区“十三五”重点规划课题“高中物理习题教学方法研究”。

作者简介:梁鸿辉(1984-),男,硕士,中教一级,主要从事高中物理教育教学研究。

位置,在 $t_1 \sim t_2$ 之间小球做加速度减小的加速运动,但是 $a-t$ 图像中 $t_1 \sim t_2$ 之间的曲线是“上凸”还是“下凹”呢?对此可进行如下分析:在 $t_1 \sim t_2$ 时间内

$$a = \frac{mg - \kappa x}{m}$$

则

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\kappa}{m} \frac{dx}{dt} = -\frac{\kappa}{m} v$$

可见在该段时间内随着小球速度的增大其加速度减小得越来越快,对应 $a-t$ 图像的斜率越来越大;在 $t_2 \sim t_3$ 时间内

$$a = \frac{\kappa x - mg}{m}$$

则

$$\frac{da}{dt} = \frac{\kappa}{m} \frac{dx}{dt} = \frac{\kappa}{m} v$$

可见在该段时间内随着小球速度的减小其加速度增大得越来越慢,对应 $a-t$ 图像斜率越来越小.综合以上分析,小球的 $a-t$ 图像应为图2所示;通过图2可画出小球的 $v-t$ 图像应为图3所示,因此选项B不正确;由胡克定律可知选项C曲线那段应为线性的;由弹性势能公式

$$E_p = \frac{1}{2} \kappa \Delta x^2$$

可知, E_p-x 的图像为二次函数,因此选项D正确.综合以上分析可知本题正确答案只有选项D.

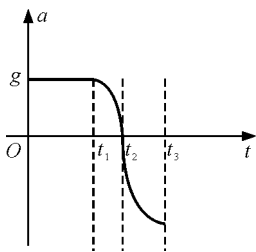


图2 $a-t$ 图像

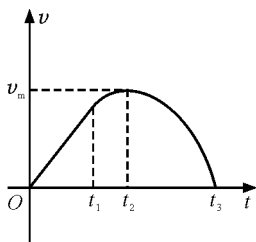
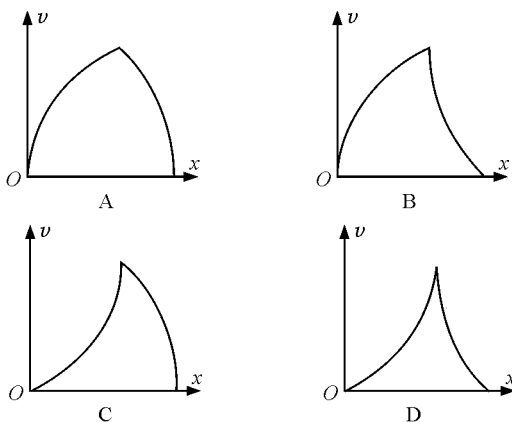


图3 $v-t$ 图像

2.2 运动学中图像的“凹凸”问题

运动学中像 $v-t$ 和 $s-t$ 这种斜率有明确物理意义的图像的变化容易判断,但有些物理意义不明确图像的斜率不好判断,曲线的“凹凸”问题直接成为解题中的拦路虎,以2014年江苏高考题为例.

【例2】一汽车从静止开始做匀加速直线运动,然后刹车做匀减速直线运动,直到停止.下列速度 v 和位移 x 的关系图像中,能描述该过程的是()



解析:该题无法直接判断 $v-x$ 图像的斜率变化,但我们可以进行变换

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{dx} = a \frac{1}{v}$$

从该式可以看出 $v-x$ 图像的斜率是加速度和速度的比值.结合题意可知:开始时汽车匀做加速直线运动,随着速度的增大 $v-x$ 图像的斜率减小;刹车后匀减速,随着速度的减小 $v-x$ 图像的斜率增大.综合以上分析选项A正确.

2.3 电磁感应图像的“凹凸”问题

电磁感应图像问题也常见于各种试题中,相关物理量之间的变化图像由于物理意义不明确,一旦涉及到图像的“凹凸”问题时比较棘手.下面从改编的第27届全国物理竞赛预赛题为例进行分析.

【例3】如图4所示, MN 为处在匀强磁场中的两条位于同一水平面内的光滑平行足够长金属导轨,电阻 R 串接导轨左端,磁场垂直于导轨平面,一金属杆 ab 可沿导轨滑动,不计杆和导轨的电阻.水平恒力 F 垂直作用于 ab ,使杆从静止开始向右运动,分别画出:

(1)杆的加速度大小随时间 t 变化的图像;

(2) 电阻 R 上消耗的总能量 E 随时间 t 变化的图像;

(3) 电阻 R 的电功率 P 随时间 t 变化的图像.

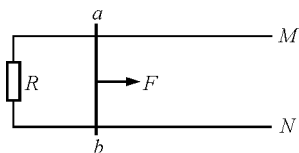


图4 例3题图

解析: (1) 设磁场的磁感应强度为 B , 当杆的速度为 v 时杆的加速度为

$$a = \frac{F - \frac{B^2 l^2 v}{R}}{m} \quad (1)$$

当杆速度增大时加速度减小, 但加速度是均匀减小? 还是“上凸”或者是“下凹”的形式减小? 我们可以根据 $a-t$ 图像斜率来判断

$$\frac{da}{dt} = -\frac{B^2 l^2}{mR} \frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 l^2}{mR} a$$

由该式可知, 加速度的变化率与加速度的变化相关, 当加速度减小时, $a-t$ 图像斜率也减小, 所以最终图像如图5所示.

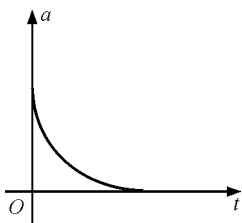


图5 例3中杆的 $a-t$ 图像

(2) 电阻 R 上消耗的总能量 E 随着时间的积累越来越多. 在杆匀速之前, 随着速度的增大, $E-t$ 图像的斜率会越来越大, 匀速后 E 随时间均匀增加, 图像如图6所示.

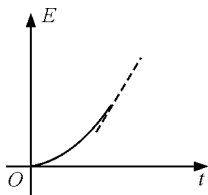


图6 例3中电阻 R 的 $E-t$ 图像

(3) 电阻 R 的电功率 P 随时间 t 变化为瞬时值

$$P = \frac{B^2 l^2 v^2}{R}$$

对时间求导得

$$k = \frac{dP}{dt} = \frac{2B^2 l^2}{R} va \quad (2)$$

由于 v 增大时 a 在减小, 所以式(2)不能直接判断出 $P-t$ 图像的“凹凸”情况, 把式(1)代入式(2)得

$$k = -\frac{2B^4 l^4}{mR^2} v^2 + \frac{2B^2 l^2}{mR} v$$

可见斜率 k 与速度 v 成开口向下的二次函数关系, 则 $P-t$ 图像的斜率先增大后逐渐减小至零, 图像如图7所示.

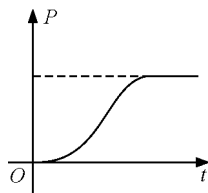


图7 例3中电阻 R 的 $P-t$ 图像

2.4 机车启动图像的“凹凸”问题

在机车以恒定功率启动问题中, 画 $a-t$ 图像有时也会碰到“上凸”和“下凹”的问题

$$a = \frac{\frac{P}{v} - f}{m}$$

则

$$\frac{da}{dt} = \frac{P}{m} \frac{dv^{-1}}{dt} = -\frac{P}{m} \frac{a}{v^2}$$

可以看出启动过程速度增大加速度减小, 则 $a-t$ 图像的斜率在减小, 其图像与图5类似.

3 结束语

物理图像是物理规律的优美呈现, 遵从科学性才能画出“凹凸有致”的图像. 从以上几种典例的分析来看, 图像的“上凸”和“下凹”背后是物理规律的必然, 每个物理图像都应该是“凹凸有致”的, 弄清楚该问题的前提是对整个物理过程都要很清楚, 同时也需要一定的数学处理技巧, 比如以上典例用到了求导知识, 这既是这类问题的难点也是突破点.

参考文献

- 张桂桐. 有关图像斜率的几种高考类型题[J]. 中学物理教学参考, 2012, 41(Z1): 53 ~ 55
- 杨荣生. 浅谈高中物理切线斜率和连线斜率[J]. 物理通报, 2018(12): 45 ~ 46