

# 离心势能教学应用 3 例

杨振东

(广西师范大学物理科学与技术学院 广西 桂林 541004)

(收稿日期:2019-09-13)

**摘要:**在匀速旋转的非惯性系中引入离心势能,并将其计入系统总势能中,使得机械能守恒等涉及势能的基本方法得以沿用.文章利用离心势能解决 3 个涉及转动的经典力学问题,以诠释其教学价值.

**关键词:**非惯性系 惯性离心力 离心势能 守恒思想 势能极值原理

不细究过程而能对系统某时刻的状态下结论,这使得机械能守恒定律在处理某些惯性系力学问题时体现出巨大的优越性.而非惯性系中处理同类问题时,机械能守恒定律不再适用,无疑减少了解决问题的途径.考虑到惯性力具有保守力的性质<sup>[1,2]</sup>,可引入惯性力势能,将其计入系统总势能中,使机械能守恒法在非惯性系中继续沿用,同时亦能将涉及势能的特殊方法迁移到非惯性系.目前国内部分普通物理教材中为惯性离心力引入“离心势能”这一概念,但未提到其具体用途与用法.本文举出其教学应用 3 例,通过 3 个经典力学问题突出离心势能的教学价值.

## 1 离心势能

力的作用线始终通过某一定点,这样的力称为有心力.一般情况下,有心力均为保守力,即满足 $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ .惯性离心力符合有心力的特点,在特定的参考系下具有保守力的性质,因此可类比其他真实的保守力,引入势能的概念,一般称为离心势能.

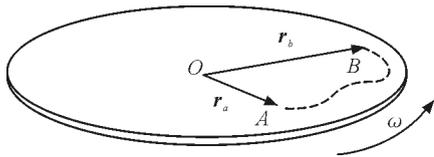


图 1 匀速旋转平面上一点自 A 点转动至 B 点

如图 1 所示,在一以恒定角速度  $\omega$  旋转的平面上,质点自 A 点移至 B 点.取圆盘作为参考平面,中点为坐标原点 O,用  $r$  表示该质点的位置矢量.质点运动过程中,受到的惯性力为科氏力与惯性离心力,其中科氏力与速度方向垂直而不做功.

在极坐标系下,将某一变力  $\mathbf{F}$  分解为径向分量  $F_r \mathbf{i}$  与横向分量  $F_\theta \mathbf{j}$ ,元位移  $d\mathbf{r}$  分解为径向分位移  $dr \mathbf{i}$  与横向分位移  $(r d\theta) \mathbf{j}$ ,则该力做功为

$$W = \int_A^B F_r dr + F_\theta r d\theta$$

对于惯性离心力而言,其方向恒沿位置矢量,因而  $F_\theta = 0$ .又因惯性离心力为  $r$  的函数,则惯性离心力做功可记为

$$W = \int_A^B F(r) dr = \int_{r_a}^{r_b} m\omega^2 r dr = \frac{1}{2} m\omega^2 (r_b^2 - r_a^2)$$

上式表明,惯性离心力在匀速转动参照系中表现出保守力性质,因此可以定义其势能.取  $r = 0$  处为势能零点,则质点在匀速转动参照系中某位置的离心势能表达式为

$$E_p^* = -\frac{1}{2} m\omega^2 r^2$$

式中  $r$  为该位置到势能零点的距离.

## 2 非惯性系机械能守恒问题

引入离心势能后,机械能守恒定律的形式在非惯性系便可继续沿用.对于匀速旋转的非惯性系,若质点所受外力均为保守力,则该质点在系统中的机械能守恒,表述为

$$E_k + E_p + E_p^* = \text{恒量}$$

其中  $E_k, E_p, E_p^*$  分别表示质点在系统中的动能、势能和离心势能.理论上讲,惯性力并非真实力,其势能是利用等效的物理思想而引入的.因此,通常情况下将  $E_p + E_p^*$  称为系统的等效势能.如果仅受保守力作用,那么利用非惯性系下机械能守恒,某些涉及匀速转动的力学问题就有了新的解决方案.

**【例1】**如图2所示,一光滑细杆绕竖直轴以匀角速度 $\omega$ 转动,杆与竖直轴夹角为 $\theta$ 保持不变.一初始状态相对细杆静止的小环自离地面高 $h$ 处沿细杆下滑,求小环滑到细杆下端的速度.

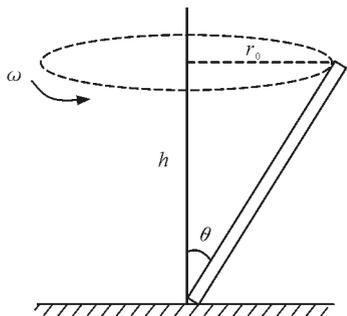


图2 光滑细杆绕竖直轴匀速转动

**方法一:**取转动的细杆作为参考系,在小环下滑的过程中,利用动能定理可得,重力做功 $W_G$ 与惯性离心力做功 $W_{离}$ 之和等于动能的增量 $\Delta E_k$ ,即

$$W_G + W_{离} = \Delta E_k$$

$$mgh + \int_{r_0}^0 m\omega^2 r dr = \frac{1}{2}mv^2$$

其中

$$r_0 = h \tan \theta$$

解得

$$v = \sqrt{2gh - \omega^2 h^2 \tan^2 \theta}$$

由于细杆下端相对地面静止,因而该速度亦是小环相对于地面的速度.

**方法二:**取转动的细杆作为参考系,小环下滑过程中系统中仅有重力与惯性离心力做功,若将离心势能计入系统总势能中,则整个过程系统机械能守恒.用 $E_k, E_p, E_p^*$ 分别表示小环在系统中初始的动能、重力势能与离心势能, $E'_k, E'_p, E_p^{*'}$ 分别表示末态的动能、重力势能及离心势能,取细杆下端为离心势能与重力势能的势能零点,有

$$E_k + E_p + E_p^* = E'_k + E'_p + E_p^{*'}$$

$$mgh - \frac{1}{2}m\omega^2 r_0^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

解得

$$v = \sqrt{2gh - \omega^2 h^2 \tan^2 \theta}$$

对比以上两种解法,尽管最终呈现的形式一致,但表达的物理思想却不相同.机械能守恒定律是力学中一条重要规律,也是更普遍的能量守恒定律在力学中的特殊体现,在非惯性系中引入机械能守恒

处理问题,捋清物理方法的逻辑脉络,容易使学生在学习中形成良好的知识结构,有助于引导学生从科学方法层面理解传统的机械能守恒定律.

### 3 非惯性系谐振问题

**【例2】**如图3所示,圆盘绕通过中心 $O$ 点的竖直轴在水平面内以角速度 $\omega$ 匀速转动,质量为 $m$ 的小球被约束在圆盘上的光滑导轨 $AB$ 内运动.小球与一劲度系数为 $k$ 的弹簧相连( $k > m\omega^2$ ),弹簧另一端固定在圆盘 $A$ 点.弹簧原长时小球位于 $P$ 点, $OP = r_0$ ,且 $OP \perp AB$ .将小球沿导轨拉开一段距离后释放.试证明小球做简谐振动,并求圆频率<sup>[3]</sup>.

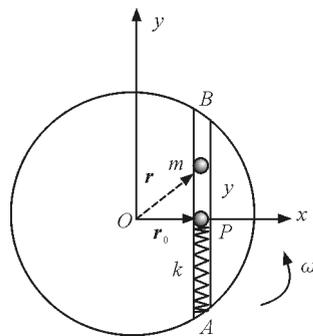


图3 匀速旋转系统中的机械振动

**方法一:**在圆盘参考系中建立如图3所示空间直角坐标系,取圆盘中心点作为原点,垂直于导轨方向为 $x$ 轴, $x-O-y$ 平面为圆盘面, $z$ 轴垂直于盘面.设小球相对于圆盘的运动速度为 $v$ ,以 $i, j, k$ 表示 $x, y, z$ 方向的单位矢量.小球受重力 $-mgk$ 、导轨作用力 $N_1 i + N_2 k$ ( $N_1$ 为侧向水平力, $N_2$ 为支持力)、弹簧弹力 $-kyj$ 、惯性离心力 $m\omega^2(r_0 i + yj)$ 、科氏力 $-2m(\omega \times v) = -2m\omega v(k \times j) = 2m\omega v i$ .根据小球受力情况,列出其动力学方程

$$-mgk + N_1 i + N_2 k - kyj + m\omega^2(r_0 i + yj) + 2m\omega v i = m \frac{d^2 y}{dt^2} j \quad (1)$$

分成3个分量式,有

$$-mg + N_2 = 0$$

$$N_1 + m\omega^2 r_0 + 2m\omega \frac{dy}{dt} = 0$$

$$-ky + m\omega^2 y = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

将第3个分量式整理得,小球在轨道中的动力学微分方程为

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \left( \frac{k}{m} - \omega^2 \right) y = 0 \quad (2)$$

形式与简谐振动动力学微分方程一致,因此判定该运动为简谐振动,圆频率为

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2} \quad (3)$$

**方法二:**取旋转圆盘为参考系,圆盘中心为坐标原点,设小球相对圆盘的速度为  $v$ ,系统总机械能记为  $E$ ,小球位置矢量记为  $\mathbf{r}$ ,  $r_0$  则为  $\mathbf{r}$  在  $x$  轴方向的分量,弹簧形变可用  $y$  表示.将离心势能计入系统总能量,则小球运动过程中系统机械能守恒.取圆盘中心为离心势能零点,则物体在任意位置处,均有

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + \frac{1}{2} k y^2 = E \quad (4)$$

由图3可知

$$r^2 = r_0^2 + y^2 \quad (5)$$

式(5)代入式(4)得

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 (r_0^2 + y^2) + \frac{1}{2} k y^2 = E$$

则

$$v^2 - \omega^2 (r_0^2 + y^2) + \frac{k}{m} y^2 = \frac{2}{m} E \quad (6)$$

两边对时间微分,注意常量  $r_0$  微分为零,则

$$2v \frac{dv}{dt} - \omega^2 2y \frac{dy}{dt} + \frac{2k}{m} y \frac{dy}{dt} = 0$$

两边除以  $2v$  得

$$\frac{dv}{dt} - \omega^2 \frac{y}{v} \frac{dy}{dt} + \frac{ky}{mv} \frac{dy}{dt} = 0 \quad (7)$$

$$\text{因} \quad v = \frac{dy}{dt}$$

式(7)整理得

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \left( \frac{k}{m} - \omega^2 \right) y = 0 \quad (8)$$

可见式(8)与第一种方法得出的式(2)完全相同,小球的运动为简谐振动,圆频率为

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2} \quad (9)$$

对比两种方法易见,引入离心势能并对系统总机械能进行微分,所得的圆频率结果与方法一完全一致.虽计算过程更为繁琐,但思路简洁,避免了过多的分析受力过程,且科学地将物理方法进行迁移,为非惯性系的谐振问题重新赋予了机械能守恒的意义,具有一定的教学价值.

#### 4 非惯性系平衡位置讨论

**【例3】**如图4所示,  $Ox$  和  $Oy$  分别是支架的水平臂与铅锤臂,  $Ox$  臂绕铅锤臂以恒定角速度  $\omega$  转动.一均匀细杆的两端  $A$  与  $B$  被分别约束在两臂上运动,假定约束是理想的,细杆质量为  $m$ ,长为  $2L$ .图中  $\theta$  表示  $OC$  与  $Oy$  之间的夹角,  $C$  为细杆质心.求细杆的平衡位置.

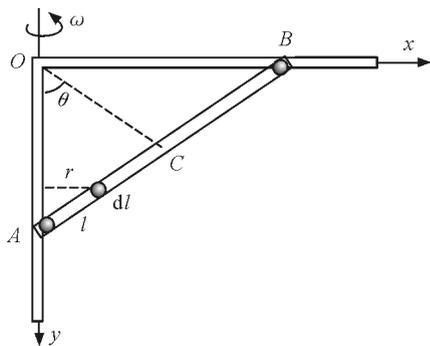


图4 匀速旋转系统中的平衡性讨论

讨论平衡类问题,从势能角度出发更为简洁<sup>[4]</sup>.涉及匀速旋转的平衡稳定性问题,可将离心势能计入系统总势能中,通过对总势能求一阶导数来求得平衡位置.

设细杆线密度为  $\lambda$ ,规定  $O$  点为重力势能零点,  $Oy$  轴为离心势能零点.由题意易得,细杆重力势能为

$$E_{p,G} = -mgL \cos \theta$$

距离转轴为  $r$  处的质元  $dm$ ,其离心势能为

$$dE_p^* = -\frac{1}{2} \omega^2 r^2 dm = -\frac{1}{2} \omega^2 (l \sin \theta)^2 \lambda dl$$

整个细杆在任意位置的离心势能为

$$E_p^* = \int_0^{2L} -\frac{1}{2} \omega^2 \lambda^2 \sin^2 \theta dl = -\frac{2}{3} m \omega^2 L^2 \sin^2 \theta$$

将系统总势能记为

$$E_p = -mgL \cos \theta - \frac{2}{3} m \omega^2 L^2 \sin^2 \theta$$

势能曲线取极值处即平衡位置,则上式对  $\theta$  求一阶导数并令其结果为零,得

$$\frac{dE_p}{d\theta} = mL \sin \theta (g - \frac{4}{3} \omega^2 L \cos \theta) = 0$$

解得平衡位置为

$$\theta_1 = 0 \text{ 或 } \theta_2 = \arccos \frac{3g}{4\omega^2 L}$$

(下转第21页)

学过程结构)格式中的版式问题.

直接绘制在课堂教学设计两段文字之间(一栏或两栏)或表格单元格中的课堂教学过程结构, Word2003自动设置其对象格式(版式),随文字(表格)移动(上下),也可重新设置.单独绘制的,要复制比用剪切好,能防止丢失.

设置对象版式.右击对象/设置对象格式/版式/高级/图片位置(确定水平对齐与垂直对齐方式,选中对象随文字移动)/文字环绕(确定环绕方式、距正文距离)/确定/确定.

### 3 用 Word2003 中绘图工具栏设计物理课堂教学过程结构的优点

课堂教学过程结构也能用几何画板或其他绘图软件制作,但使用 Word2003 自带的绘图工具栏绘制简便、经济.因为 Word2003 是文字处理的公用软件,课堂教学设计的文字部分、表格部分和用自带的绘图工具栏绘制的组合图形对象,其中所添加(编辑)的文字,都是用同一个软件制作的,是相一致的,复制不需要转换软件,修改容易,排版容易.用 Word2003 自带的绘图工具栏绘制图形对象比用其他绘图软件易学,易掌握,易操作. Word2003 自带

(上接第 17 页)

由于  $\cos \theta \leq 1$ , 则需  $\frac{3g}{4\omega^2 L} \leq 1$ , 即  $\omega \geq \sqrt{\frac{3g}{4L}}$  时才存在  $\theta_2$  这一平衡位置.

单个物体在保守力场中运动,势能曲线极值点对应的位置即为平衡位置.将这一结论推广到匀速旋转的非惯性系中,通过引入离心势能来沿用这一结论,对处理非惯性系中的平衡问题提供了便利.

### 5 小结

现行力学教材中的物理规律大多建立在惯性系中,将这些规律移置在非惯性系下进行讨论,渗透物理思想,重现物理规律方法建立的过程,使知识的建立触及学生思维层面,才算避免机械灌输,达到有意义学习.在匀速旋转的参考系中引入离心势能,从教

的绘图工具栏由于是自带,所以计算机中只要安装 Word2003 软件就会有绘图工具栏,其他绘图软件一般计算机没有安装,要使用就得安装(不方便),且操作复杂,不易掌握.

综上所述,对于广大中学物理教师(尤其是农村中学),信息化课堂教学过程结构设计,用 Word2003 自带的绘图工具栏绘制易学好用<sup>[2]</sup>,应该是首选的.只有掌握方法要领,加上反复训练,才能熟练操作应用方便.

此文对物理信息化教学设计尤其是基于网络的物理“双课堂”教学设计[“双课堂”教学设计中教学过程结构(流程图)是不可缺少的必要组成部分]有帮助,对其他学科信息化教学设计亦有参考,对解读国内信息化教育教学领域的带头人、著名学者南国农教授主编的《信息化教育概论》中关于课堂教学过程结构设计的论述在物理学科中的应用也有辅助<sup>[3]</sup>.

### 参考文献

- 1 王新.探究凸透镜成像的规律[J].中国多媒体与网络教学学报(电子版),2017(06):21~22
- 2 员贵云.Word2003 绘图工具栏绘制物理图形技巧指南[J].物理通报,2012(09):118~120
- 3 南国农.信息化教育概论[M].北京:高等教育出版社,2004.79~222

学上说,既是力学框架下内容的补充,又是梳理“机械能守恒”逻辑脉络的机会.将惯性系中涉及势能的规律推广到非惯性系中,并借以解决非惯性系力学问题,是学生深化理解知识,进行科学迁移的重要过程.因此,离心势能的教学就应注重归纳科学方法,而不能让学生止步于对公式本身的记忆.

### 参考文献

- 1 舒幼生.力学[M].北京:北京大学出版社,2005.86~88
- 2 马秀艳.非惯性系中的机械能守恒定律[J].安阳师范学院学报,2012(05):120~121
- 3 舒幼生,胡望雨,陈秉乾.物理学难题集萃(上册)[M].合肥:中国科学技术大学出版社,2014.212~214,237~238
- 4 赵凯华,罗蔚茵.新概念物理教程·力学(第2版)[M].北京:高等教育出版社,2004.115~116