

# 点电荷在接地金属球形空腔内的电场分布

陈晓平 谢元栋

(华南师范大学物理与电信工程学院 广东 广州 510006)

(收稿日期:2019-11-11)

**摘要:**利用镜像法求解出点电荷在接地导体球壳内的电场分布,进而考虑相对论效应,讨论了点电荷在球壳内的受力情况.结合 Mathematica11.3 进行绘图,直观地展示了球壳内电场空间分布的特点.

**关键词:**点电荷 接地导体球壳 镜像法 相对论效应

本文讨论的金属空腔表面为球面.为方便起见,球壳厚度不计.根据镜像法,可以求解出点电荷在接地导体球壳内的电势、电场强度分布的解析式.利用 Mathematica 强大的数值计算能力,探讨解析式背后的物理意义.在点电荷和感应电荷共同激发的电场中,考虑相对论效应,讨论点电荷在球壳中静止释放的运动情况.

## 1 电势和电场强度公式推导

如图 1 所示,点电荷在  $x$  轴上距球心  $b$  的位置,  $r$  与  $x$  轴的夹角为  $\theta$ .镜像电荷在  $x$  轴上距球心  $d$  的位置.导体球壳接地,半径为  $a$ .

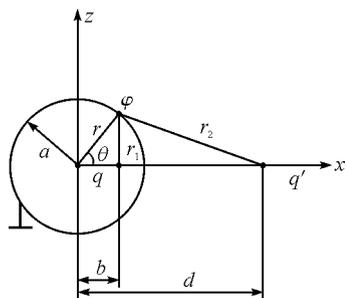


图 1 电势和电场强度公式推导情境图

由唯一性定理和镜像法<sup>[1]</sup>可知

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_2} = 0 \quad (1)$$

所以

$$qr_2 = -q'r_1 \quad (2)$$

即

$$q^2 r_2^2 = q'^2 r_1^2 \quad (3)$$

由余弦定理可得

$$r_1^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta \quad (4)$$

$$r_2^2 = d^2 + a^2 - 2ad \cos \theta \quad (5)$$

联立上式可得

$$\begin{aligned} q'^2 (b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta) &= \\ q^2 (d^2 + a^2 - 2ad \cos \theta) & \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)在任意角度下都应该成立,所以有

$$q'^2 (b^2 + a^2) = q^2 (d^2 + a^2) \quad (7)$$

$$2abq'^2 = 2adq^2 \quad (8)$$

解得

$$d_1 = \frac{a^2}{b} \quad (9)$$

$$d_2 = b \text{ (不符合实际情况,舍去该解)} \quad (10)$$

$$\text{则} \quad q' = -\frac{a}{b}q \quad (11)$$

综上所述,接地导体球壳内的电势分布为

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta}} - \frac{a}{\sqrt{r^2 b^2 + a^4 - 2a^2 rb \cos \theta}} \right) \quad (12)$$

如图 1 所示,在直角坐标系下,  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ,

$x = r \cos \theta$ , 电场强度的各个分量为

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} =$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{x-b}{(x^2+y^2+z^2+b^2-2xb)^{\frac{3}{2}}} + \frac{ab(a^2-xb)}{[b^2(x^2+y^2+z^2)+a^4-2a^2xb]^{\frac{3}{2}}} \right\} \quad (13)$$

$$E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} =$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{y}{(x^2+y^2+z^2+b^2-2xb)^{\frac{3}{2}}} - \frac{ab^2y}{[b^2(x^2+y^2+z^2)+a^4-2a^2xb]^{\frac{3}{2}}} \right\} \quad (14)$$

$$E_z = -\frac{\partial U}{\partial z} =$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{z}{(x^2+y^2+z^2+b^2-2xb)^{\frac{3}{2}}} - \frac{ab^2z}{[b^2(x^2+y^2+z^2)+a^4-2a^2xb]^{\frac{3}{2}}} \right\} \quad (15)$$

由于球壳表面各点电势梯度与  $r$  反向, 所以

$$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{r=a} = \epsilon_0 \left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=a} = -\frac{q}{4\pi a} \frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2-2ab\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} \quad (16)$$

总的感应电荷为

$$q' = \int \sigma dS = \int_0^\pi -\frac{q}{4\pi a} \frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2-2ab\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} 2\pi a^2 \sin\theta d\theta = -q \quad (17)$$

若将点电荷从静止释放, 点电荷会朝着球壳内表面做变加速运动, 甚至会出现接近光速的现象, 此时应考虑相对论效应<sup>[2]</sup>. 基于以上讨论, 点电荷运动到位置  $x$  处时, 镜像电荷的大小和位置如下

$$d = \frac{a^2}{x}$$

$$q' = -\frac{a}{x}q$$

点电荷和球壳之间的相互作用力可以等效为点电荷与镜像电荷之间的电像力. 则有

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 a}{x \left( \frac{a^2}{x} - x \right)^2} \quad (18)$$

根据相对论公式

$$F = \frac{dp}{dt} \quad (19)$$

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (20)$$

联立式(18)、(19)、(20), 得到

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 a}{x \left( \frac{a^2}{x} - x \right)^2} = \frac{m_0 \frac{dv}{dt}}{\left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \quad (21)$$

利用  $\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dx}$  进行分离变量, 根据初始条件  $x=b$ ,

$v=0$  进行积分, 得

$$\int_b^x \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 a}{x \left( \frac{a^2}{x} - x \right)^2} dx = \int_0^v \frac{m_0 v}{\left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}} dv \quad (22)$$

解得

$$v = \frac{c \sqrt{[\gamma(x^2-b^2) + 2c^2(a^2-x^2)]^2 - 4c^4(a^2-x^2)^2}}{\gamma(x^2-b^2) + 2c^2(a^2-x^2)} \quad (23)$$

其中

$$\gamma = \frac{q^2 a}{4\pi\epsilon_0 m_0 (a^2 - b^2)}$$

运动方向朝着  $x$  轴正方向.

## 2 电势和电场强度分布

由于电势和电场强度分布的公式较为复杂, 单单从公式较难发现背后的物理规律. 这个时候我们可以借助 Mathematic11.3 进行数值积分绘图进行分析. 令  $a=0.5, b=0.25$ , 同时令  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0} = 1$ , 利用 Mathematic11.3 在直角坐标系下进行绘图, 得到的结果都是相对大小. 球壳内电场分布关于  $x$  轴对称, 这里可以令  $y=0$ , 选取平面  $xOz$  这一截面进行绘图, 如图 2 ~ 图 7 所示.

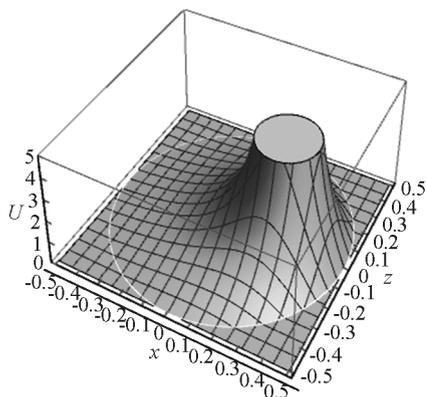


图2 电势分布图

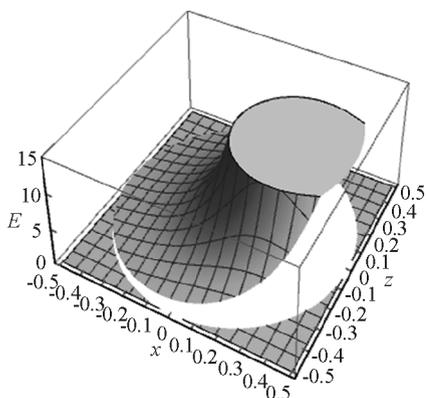


图3 电场强度分布图

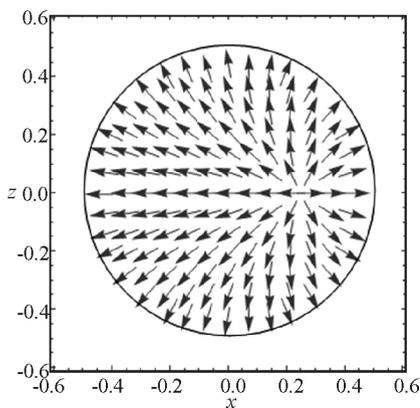


图4 电场强度方向分布图

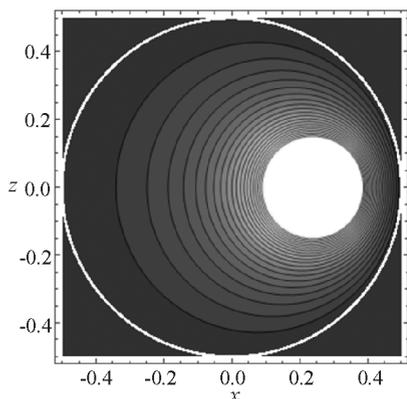


图5 等势线图

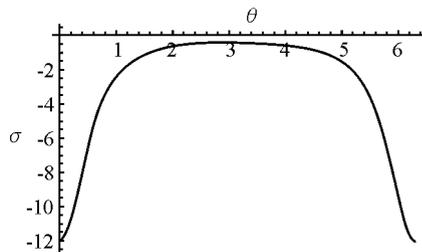


图6 电荷面密度分布图

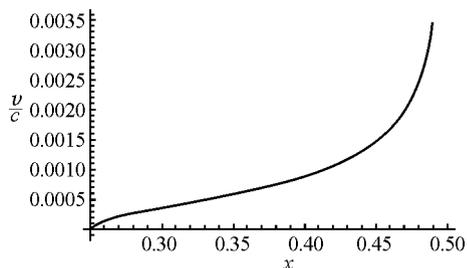


图7 速度-位置关系图

由于这里采用了点电荷模型,当坐标趋近于点电荷时,电势趋于无穷大.但是图形只能画出有限值,所以 Mathematica 会在有限范围内自动截断<sup>[3]</sup>.

这里点电荷是放置在  $x = 0.25, z = 0$  处.

在电势分布图中,球壳内电势大于零,球壳外电势为零,电势在球面处连续分布.球壳内表面靠近点电荷的一侧电势显著大于远离点电荷的一侧.在等势线图中,可以清楚看到球壳内靠近点电荷附近的等势面更为密集.

在电场强度分布图中,球壳内电场强度均大于零,球壳外电场强度均为零,电场强度在球面处并不连续分布.所以电场强度分布并没有像电势分布图那样,在球面处闭合,而是出现了“空白”.球壳内表面靠近点电荷的一侧电场强度显著大于远离点电荷的一侧,说明靠近点电荷的球壳内表面处感应电荷的绝对值较大,而在远离点电荷的球壳内表面处只有少量的感应电荷.

在电场强度方向分布图中,电场线没有穿透球壳,球面为等势面.从图中的箭头方向,不难看出感应电荷均为负电荷.

在电荷面密度分布图中,区间  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$  的电荷面密度的绝对值显著小于区间  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  和  $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ .



# 基于思维型课堂基本原理的习题教学实践与思考

——以屈膝下蹲过程中运动与相互作用关系为例

钟志鹏

(无锡市玉祁高级中学 江苏 无锡 214183)

曹俊

(无锡市玉祁初级中学 江苏 无锡 214183)

(收稿日期:2019-08-25)

**摘要:**思维型课堂是培育物理学科核心素养的有效途径,习题教学是培育物理学科核心素养的重要载体.围绕思维活动这一核心将认知冲突、自主建构、自我监控和应用迁移有机融入到习题教学全过程.以屈膝下蹲过程中运动与相互作用关系为例,就习题课教学的目标叙写、凸显思维的教学流程、围绕思维互动的教学实践提出了实施建议.

**关键词:**思维型课堂 物理学科核心素养 习题教学 自主建构

## 1 思维型课堂的内涵和习题教学

### 1.1 思维型课堂内涵概述

林崇德、胡卫平教授提出思维型课堂教学理论,以聚焦思维结构的智力理论为基础,着眼于课堂教学中的思维活动,意在提高课堂的教学质量.

思维型课堂教学理论包括认知冲突、自主建构、自我监控和应用迁移 4 方面的基本原理.通过认知

冲突,诱发思维结构的动态性,提供积极思维和主动学习的动力.自主建构包括认知建构和社会建构,认知建构强调学习积极主动建构的过程;社会建构强调在师生互动、生生互动的过程中,情感互动是基础,行为互动是表现,思维互动是核心.自我监控能力是教师教学能力和学生学习能力的核心,尤其是教学反思环节,教师都要引导学生对学习对象、学习过程、思维方式进行总结、反思和评价,形成认知策

感应电荷面密度受到角度  $\theta$  变化的影响,感应电荷分布关于  $x$  轴对称.在  $\theta=0$  处,也就是球壳内表面距离点电荷最近的地方,可以取得最大值.这与前面分析所得情况也是符合的.

在速度-位置关系图中可以看出,点电荷在向接地导体球壳运动时,速度不断增大,速度的变化率也迅速增大.

## 3 结论

基于理论推导和数值积分绘图,我们可以得出一致的结论:点电荷在接地导体球壳内时,内表面感应电荷均为负电荷.球壳内表面靠近点电荷一侧的

电荷面密度的绝对值明显较大.所以电场大多集中在球壳内靠近点电荷的一侧.

在点电荷和球壳内表面感应电荷共同激发的电场中,若将点电荷静止释放,将做加速度增大的变加速运动.

### 参考文献

- 1 郭硕鸿.电动力学[M].北京:高等教育出版社,1992
- 2 Kevin L Haglin. Point charge dynamics near a grounded conducting plane[J]. American Journal of Physiology, 2010
- 3 江俊勤.基于 Mathematica 的数字化物理学[M].北京:科学出版社,2015