

# 对小船渡河最小位移问题进行定性和定量分析

姜璐涵

[江苏省苏州中学高三(4)班 江苏 苏州 215007]

周航

(苏州大学物理科学与技术学院 江苏 苏州 215006)

(收稿日期:2018-10-11)

**摘要:**“最值问题”是中考、高考物理试题和数学试题中最常见的题型,其目的是考察考生运用物理、数学知识解决实际问题的能力.如能将数学中的积分、求导等思想用于解决物理问题,不仅可以使物理问题出现一题多解的可能性,还能更好地促进学生对数学知识的掌握.

**关键词:**位移 定性 定量 求导 融合

小船渡河问题是高中物理中较为经典的题型,其本质上考察的是“矢量的合成与分解”这一知识点.针对小船渡河问题最常见的考点即为最小运动时间和最小运动位移的计算.其中,最小运动时间是比较容易理解和计算的,不论船速和水速的大小如何,只要使得船头的方向与河岸垂直,此时运动的时间即为最小.但对于最小运动位移的问题,则需要根据船速和水速的大小,不断调整船头的方向才能实现.

**题目:**有一条小河宽度为  $S$ ,小船在静水中运动的速度为  $v_{\text{水}}$ ,河水流动速度为  $v_{\text{船}}$ ,求小船如何渡河才能使船行驶的位移最小?(假设水流动速度处处相等)

## 1 定性分析

(1) 当  $v_{\text{船}} > v_{\text{水}}$  时

如图 1 所示,可以通过调节船头的方向,恰巧使得合速度的方向与河岸垂直,此时小船运动到河对岸的位移最小,即为河宽  $S$ .

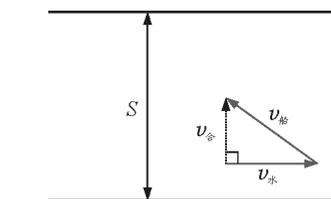


图 1  $v_{\text{船}} > v_{\text{水}}$  时  $v_{\text{合}}$  与河岸垂直

(2) 当  $v_{\text{船}} < v_{\text{水}}$  时

如图 2 所示,由于实际情况下  $v_{\text{水}}$  的方向始终是与河岸平行的.那么无论我们如何调节船头的方向,都不可能使得合速度的方向与河岸垂直(直角三角形的斜边长度一定大于两直角边长).若要使小船运动到河对岸的位移最小,根据三角形的相似性,则必须满足合速度的方向与河岸垂直方向之间的夹角最小,即图中所示的  $\varphi$  角最小.通过调整船头方向,当且仅当  $v_{\text{船}}$  方向与  $v_{\text{合}}$  (合速度) 方向相互垂直时,该情况下的  $\varphi$  角最小,根据三角关系,可以推算出小船渡河的最小位移为  $S \frac{v_{\text{水}}}{v_{\text{船}}}$ .

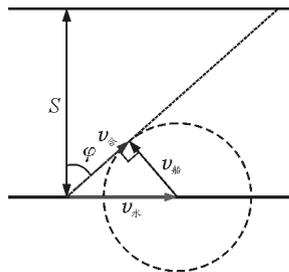


图 2  $v_{\text{船}} < v_{\text{水}}$  时  $v_{\text{合}}$  与垂直方向夹角为  $\varphi$

## 2 定量分析

$v_{\text{船}}$ ,  $v_{\text{水}}$  及  $v_{\text{合}}$  3 个矢量恰好构成了一个三角形,假设  $v_{\text{船}}$  与  $v_{\text{水}}$  的夹角为  $\theta$ ,如图 3 所示,根据余弦定理可得

(下转第 129 页)

定程度时,周围产生很强的电场使空气电离,尖端的电荷向空气中释放,形成尖端放电,根据反冲原理,叶轮将受到相反方向的作用力向着尖端指向反方向转动。

笔者用易拉罐制作的几个教具在教学中取得了很好的效果,具体体现在以下几个方面:

(1) 用易拉罐制作的教具贴近生活,学生感觉亲切、好奇,产生了强烈的求知欲望和学习兴趣,急于探索感性现象背后的理论知识;同时增强了变“废”为“宝”的环保意识。

(2) 引导学生共同参与制作教具,从发现问题,解决问题到创造性地设计出新教具的过程中,培养

了学生的创造性思维和实践动手能力。

(3) 教师开发利用易拉罐等生活中的器材制作教具来填补教材中部分实验空白,要求教师热爱教学科研,勤于观察思考,从设想开始到动手设计、制作、试用,最后定型,都要经过深思熟虑和反复打磨,有利于提高物理教师的专业素养。

(4) 易拉罐等生活器材取材容易、操作方便,与厂家器材相比价格低廉,更易于同行之间推广。

### 参考文献

- 姚根林. 点石成金化腐朽为神奇——巧用易拉罐做物理实验. 中学物理:初中版, 2016, 34(8): 50 ~ 51

(上接第 126 页)

$$v_{\text{合}} = \sqrt{v_{\text{船}}^2 + v_{\text{水}}^2 - 2v_{\text{船}} v_{\text{水}} \cos \theta} \quad (1)$$

把小船的速度  $v_{\text{船}}$  分解为沿着河岸方向的  $v_{\text{船}\parallel}$  和垂直于河岸方向的  $v_{\text{船}\perp}$  两个分速度,则有

$$v_{\text{船}\perp} = v_{\text{船}} \sin \theta \quad (2)$$

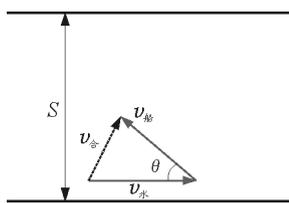


图3  $v_{\text{船}}$  与  $v_{\text{水}}$  的夹角为  $\theta$

因为小船沿着河岸的分速度和水速均与河岸平行,故小船运动到河对岸的有效速度为  $v_{\text{船}\perp}$ ,则小船渡河过程中的有效时间为

$$t = \frac{S}{v_{\text{船}\perp}} \quad (3)$$

小船渡河运动的位移为

$$L = v_{\text{合}} t \quad (4)$$

由式(1)~(4)得

$$L = \frac{S}{\sin \theta} \sqrt{1 + \left(\frac{v_{\text{水}}}{v_{\text{船}}}\right)^2 - 2\frac{v_{\text{水}}}{v_{\text{船}}} \cos \theta} \quad (5)$$

令  $\frac{v_{\text{水}}}{v_{\text{船}}} = x (x \geq 0)$ , 则式(5)变为

$$L = \frac{S}{\sin \theta} \sqrt{1 + x^2 - 2x \cos \theta} \quad (6)$$

由小船渡河问题进行定性分析时知,只有调整船头的方向满足一定条件才能使得小船运动的位移最小,所以需要将对  $L$  对  $\theta$  进行求导,经计算和化简得

$$L' = \frac{S [x(1 + \cos^2 \theta) - \cos \theta(1 + x^2)]}{\sin^2 \theta \sqrt{1 + x^2 - 2x \cos \theta}} \quad (7)$$

令式(7) = 0, 得

$$\frac{\cos \theta}{1 + \cos^2 \theta} = \frac{x}{1 + x^2} \quad (8)$$

因为  $|\cos \theta| \leq 1$ , 所以有

$$\cos \theta = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x} & x \geq 1 \end{cases} \quad (9)$$

将式(9)代入式(6)得

$$L_{\min} = \begin{cases} S & 0 \leq x < 1 \\ S \frac{v_{\text{水}}}{v_{\text{船}}} & x \geq 1 \end{cases}$$

本文通过定性分析和定量分析两种方法对小船渡河的最小位移问题进行了深入剖析. 通过定性分析,对运动过程中的整个物理机制和原理有了更深层次的认识和理解;利用数学求导的思想进行定量分析,使解题思路更加清晰明了,在一定程度上提高了跨学科素养和综合解决问题的能力。

高中物理知识与生活密切相关,因此生活中的物理现场也常被搬到物理课堂中. 但往往会出现很多物理问题需要以数学知识为抓手,这就使得我们很难进行定量分析. 所以,高中学生可以尝试或者思考如何将数学知识或方法融合到物理思维当中. 这不仅可以使相关物理问题迎刃而解,也能实现从点到线再到面的全方位提高学生的综合素质。

### 参考文献

- 同济大学数学系. 高等数学. 北京: 高等教育出版社, 2018
- 周航, 陈敏, 高东梁, 等. 浅谈“微信公众平台”在物理实验中的应用——以切变模量实验为例. 物理教师, 2018(4): 60 ~ 62