



基于圆球模型推导重力加速度与纬度的关系式

任孝有

(北京市通州区潞河中学 北京 101100)

(收稿日期:2020-02-04)

摘要:将地球建模为粗糙圆球模型,以高中物理知识推导出重力加速度与纬度的关系式,并与已有的两种关系式进行了对比验证,表现为结果高度一致.

关键词:圆球 模型建构 重力加速度 纬度 关系式

有意义的科学实践活动既是探究活动,也是科学模型的建构、分析、验证、评估和优化的过程^[1]. 模型建构,是2017版《高中物理课程标准》中科学思维之一,是培养学生核心素养的重要方法,也是高考中重点考查的内容,例如2019年高考北京卷第24题对雨滴运动建构圆球模型、圆盘模型以解决不同的问题. 在高三第二轮复习过程中,可以结合高中的典型问题,适度拓展,帮助学生体会模型建构的过程,促进建模能力的提升.

1 提出问题

重力加速度的大小随纬度的增加而增大,那么两者的定量关系是什么呢? 为了解决这个问题,我们需要对地球形状进行建模,选择静止在地球表面上的小物体作为研究对象,分析其受力和运动,进而获得重力加速度的表达式.

2 建构模型

2.1 《普通物理学》中重力与万有引力的关系

在地球表面上的物体所受的万有引力 F 可以分解成物体所受的重力 G 和随地球自转而做圆周运动的向心力 F' ,如图1所示,其中

$$F = G_0 \frac{Mm}{R^2}$$

式中 G_0 为万有引力常量.

$$F' = m\omega^2 r$$

地面上观察时,如图2所示,支持力 N 与 G 是一对平

衡力,方向相反,而 N 与接触面垂直,从图1中 F 与 G 的方向关系分析, G 不指向地心, N 就不是背离地心,所讨论模型不是球形,而是椭球形状,赤道直径大于两极点间距离. 高中阶段分析万有引力问题时,地球常简化为圆球,这样数学要求相对简单,更符合高中阶段学生的认知水平,因此需要建构圆球模型推导重力加速度与纬度的关系式^[2].

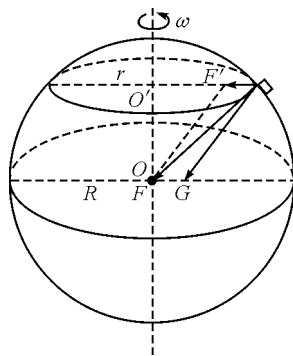


图1 地球表面物体所受万有引力分解

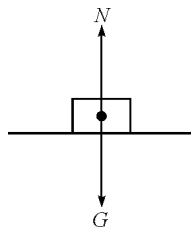


图2 地面上的物体受一对平衡力

2.2 基于圆球模型推导重力加速度与纬度的关系式

按地球为圆球模型对静止在地面上的小物体 m 进行受力分析,如图3所示,指向地心的万有引力

F ,垂直切面向外的支持力 N ,同时必有一个沿切面向上的静摩擦力 f ,才能提供物体随地球做圆周运动的向心力.因此,更准确地说建构表面粗糙的圆球模型.对于重力 G ,在地面上其大小等于物体所受的支持力 N ,方向沿半径指向地心 O .

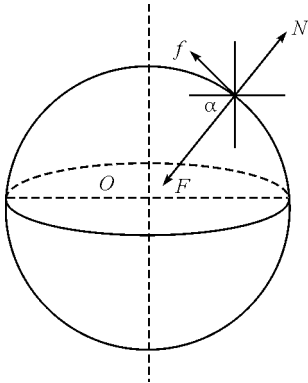


图3 地面物体受力分析

设地球半径为 R ,自转角速度为 ω ,在纬度 α 处,小物体 m 做圆周运动的轨道半径为 r .如图3所示,建立水平竖直坐标系,对 F,N,f 进行正交分解有

$$\begin{cases} F\cos\alpha + f\sin\alpha - N\cos\alpha = m\omega^2r \\ f\cos\alpha + N\sin\alpha = F\sin\alpha \end{cases}$$

将两个等式变换,消掉 f

$$\begin{cases} F\cos^2\alpha + f\sin\alpha\cos\alpha - N\cos^2\alpha = m\omega^2r\cos\alpha \\ f\cos\alpha\sin\alpha + N\sin^2\alpha = F\sin^2\alpha \end{cases}$$

得

$$F - N = m\omega^2r\cos\alpha$$

因为

$$r = R\cos\alpha$$

所以

$$F - N = m\omega^2R\cos^2\alpha$$

即

$$G = F - m\omega^2R\cos^2\alpha$$

分两种情况做初步分析:

- (1) 两极时, $\alpha = 90^\circ$,重力等于万有引力;
- (2) 赤道时, $\alpha = 0^\circ$, $G = F - m\omega^2R$.

与常规分析一致.

进一步分析,显然对于任意纬度,重力加速度

$$g = \frac{G_0M}{R^2} - \omega^2R\cos^2\alpha \tag{1}$$

取 $G_0 = 6.672\,59 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$

$$\begin{aligned} M &= 5.965 \times 10^{24} \cdot \text{kg} \\ R &= 6\,371\,393 \text{ m} \\ \omega &= \frac{2\pi}{24 \times 3\,600} \text{ rad/s} \end{aligned}$$

得到如表1所示对比数据.

表1 不同纬度对应的加速度

纬度 $\alpha/(^\circ)$	计算出重力加速度 $g/(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$	查询到重力加速度 $g_0^{[3]}/(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$
0	9.771 05	9.780 30
10	9.772 06	9.781 86
20	9.774 99	9.786 34
30	9.779 47	9.793 21
40	9.784 97	9.801 66
50	9.790 82	9.810 66
60	9.796 32	9.819 14
70	9.800 80	9.826 06
80	9.803 72	9.830 58
90	9.804 74	9.832 18

根据表1数据,用Excel画出重力加速度 g 与纬度 α 的关系图线如图4所示,从中可以看出计算值 g 小于查询值 g_0 ,但变化趋势一致.考虑到地球实际不是球形,结果需要修正,从图4猜想,如果将计算图线的起点与终点上移与查询值一致,两条图线或许会重合.

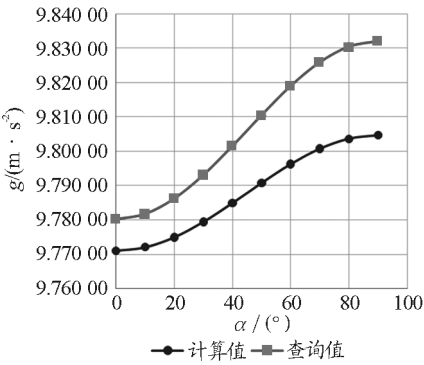


图4 $g-\alpha$ 关系图

3 修正模型

因为式(1)右侧两项中都含有半径 R ,基于控制变量的思想,保持 R 不变. G_0 为万有引力常量不能改变,因此第一项中只能改变 M ,第二项只改变 ω .

根据查询数据可得以下结论.

当 $\alpha = 90^\circ$ 时, $g_{\text{极点}} = 9.832\ 18\ \text{m/s}^2$,代入式(1)有

$$\frac{G_0M}{R^2} = 9.832\ 18\ \text{m/s}^2 \tag{2}$$

当 $\alpha = 0$ 时, $g_{\text{赤道}} = 9.780\ 30\ \text{m/s}^2$,代入式(1)有

$$\frac{G_0M}{R^2} - \omega^2R = 9.780\ 30\ \text{m/s}^2 \tag{3}$$

联立式(2)、(3)可得

$$\omega^2R = 0.051\ 88\ \text{m/s}^2 \tag{4}$$

由式(1)、(2)、(4)得出 g 的一般表达式

$$g = (9.832\ 18 - 0.051\ 88 \cos^2\alpha)\ \text{m/s}^2 \tag{5}$$

根据式(5)获得的数据如表2所示,再画出 g 与 α 的关系图线,如图5所示,两条图线重合. 由式(2)

可知, $M = 5.981\ 695 \times 10^{24}\ \text{kg}$,由式(4)及 $T = \frac{2\pi}{\omega}$

可知,自转周期 T 大约是 $19.34\ \text{h}$. 也就是需要建构一个质量更大、自转周期更小、半径为地球平均半径、表面粗糙的圆球形状的地球模型.

表2 不同纬度对应的修正后的重力加速度

纬度 $\alpha/(^\circ)$	计算出重力加速度 $g/(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$	查询到重力加速度 $g_0^{[3]}/(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$
0	9.780 30	9.780 30
10	9.781 87	9.781 86
20	9.786 37	9.786 34
30	9.793 27	9.793 21
40	9.801 74	9.801 66
50	9.810 75	9.810 66
60	9.819 21	9.819 14
70	9.826 11	9.826 06
80	9.830 62	9.830 58
90	9.832 18	9.832 18

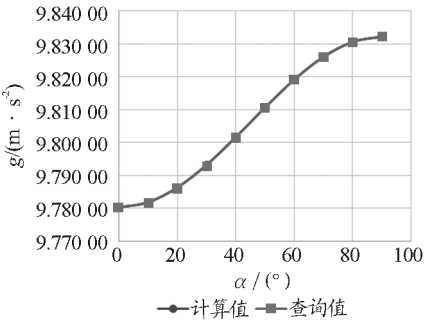


图5 修正后的 $g-\alpha$ 关系图

4 评估模型

查询资料^[4],当把地球看成是一个球体近似有

$$g = 9.780\ 3 \times (1 + 0.005\ 3 \sin^2\alpha)\ \text{m/s}^2 \tag{6}$$

根据式(5)、(6)获得的数据,同样画出 g 与 α 的关系图线,如图6所示,两者完全重合,说明修正的关系式(5)成立,所建构圆球地球模型成立.

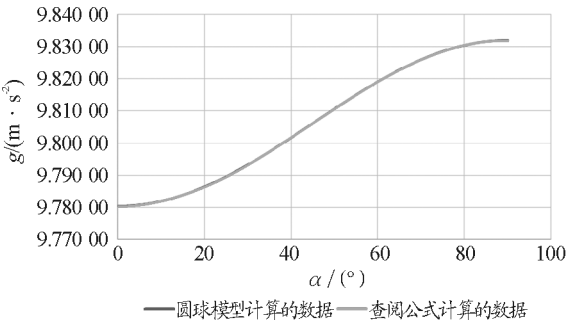


图6 把地球看成一个球体 $g-\alpha$ 关系图

5 应用模型

按照资料^[4],当把地球看成是一个椭球时,有

$$g = 9.780\ 3 \times (1 + 0.010\ 5 \sin^2\alpha)\ \text{m/s}^2 \tag{7}$$

由式(7)可知

$$\begin{aligned} \alpha = 0 \quad g_{\text{赤道}} &= 9.780\ 3\ \text{m/s}^2 \\ \alpha = 90^\circ \quad g_{\text{极点}} &= 9.883\ 0\ \text{m/s}^2 \end{aligned}$$

按照式(1)及修正过程,可以得到

$$g = (9.883\ 0 - 0.102\ 7 \cos^2\alpha)\ \text{m/s}^2 \tag{8}$$

根据式(7)、(8)获得的数据,画出 g 与 α 的关系图线,如图7所示,两者完全重合,说明修正的关系式(8)成立.

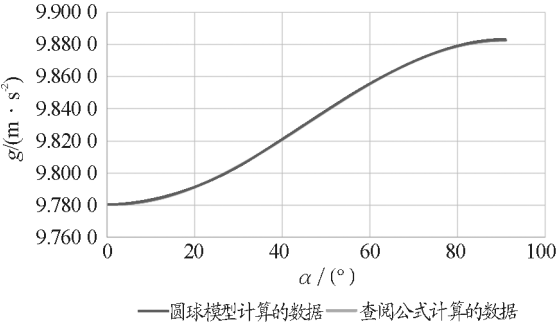


图7 把地球看成一个椭球体 $g-\alpha$ 关系图

也就是无论按哪种模型方法推导,只要按照上

(下转第62页)

$$\overline{P}=\frac{W}{t}$$

解得

$$\overline{P}=\frac{4\sqrt{5}}{5}\mu mgv_0.$$

答案:(1) $\frac{\sqrt{2}v_0^2}{2\mu g}$; (2) $2v_0$; (3) $\frac{4\sqrt{5}}{5}\mu mgv_0$.

4 变换参考系化解解方程组的难点

有时两个物体的相对运动在一条直线上且都是匀速运动,但两个过程的速度不等,此时虽然能列出方程组,但解方程组的难度大,学生也不易求解,此时能合理地选择参考系往往能化解这一难点.

【例 4】某人划船逆流而上,当船经过一桥时,船上一小木块掉在河水里,但一直航行至上游某处时此人才发现,便立即返航追赶,当他返航经过 1 h 追上小木块时,发现小木块距离桥有 5 400 m 远,若此人向上和向下航行时船在静水中前进速率相等.试求河水的流速为多大.

分析:本题中船在向上和向下航行时相对于地面的速度不等,位移也不等,如以地面为参考系学生往往认为可以列出方程,但解方程组时非常困难,有时花了很长时间也求不出,但如果以水或木块为参考系,再以地面为参考系则很容易求解.

解析:先以水为参考系,此时河水与木块相对静止,即河水的流速与木块漂流的速度相等.

以水为参考系的意思是,假设河水是静止的,或者说呆在一个平静的湖中.那么小木块相对于河水来说是不动的,可等效为某人划船先远离静止的木块运动,经过一段时间后再返回到木块处,返程走了 1 h,此人向上和向下航行时船在静水中前进速率相等,那么前进了也是 1 h.那么一共是 2 h.

再以桥为参考系,可知木块位移为 5 400 m,代入公式

$$v=\frac{x}{t}$$

得

$$v=\frac{5\,400\text{ m}}{2\times 3\,600\text{ s}}=0.75\text{ m/s}$$

答案:水的速度为 0.75 m/s.

总而言之,物理教学中的知识点,不能仅满足于讲透,还要注重知识的应用,这样才能在解决各类问题中化解问题的难点,同时也能激发学生的学习兴趣,提高学生的学习效率.

参 考 文 献

1 周智良. 选好参照物,求解运动学问题[J]. 物理教学探讨,2009,27(2):51 ~ 52
2 徐铁刚. 灵活选择参考系 简化多物体相对运动问题[J]. 中学物理,2016,34(1):86 ~ 87
3 何汝辉. 灵活选用参照系巧解运动学问题[J]. 湖南中学物理,2009,24(2):60 ~ 61

(上接第 58 页)

述建模及修正方法,都可以获得重力加速度 g 与纬度 α 对应的准确关系式. 因此对于任意近似球状天体,只要精确测出两个不同维度上的重力加速度,则可以获得其重力加速度与纬度的关系式,而不需要其具体的质量、自转周期、半径等. 如果使用赤道和极点的重力加速度,则重力加速度与纬度的关系可以表达为如下关系式

$$g=g_{\text{极点}}-(g_{\text{极点}}-g_{\text{赤道}})\cos^2\alpha$$

6 反思模型:为何可以这样做?

圆是特殊的椭圆,圆球是特殊的椭球. 从圆球推理出的重力加速度 g 的表达式,从椭球也应可以推

出,但一定有不同,体现在修正前变化趋势类似而结果偏小,当然这种模型建构过程,更像是黑体辐射导致普朗克提出能量子,要充分借助实验数据,大胆想象,充分检验.

参 考 文 献

1 翟小铭,郭玉英. 美国科学建模教育研究三十年概述及启示[J]. 全球教育展望,2015(12)
2 程守洙,江之永. 普通物理学(第 7 版)上册[M]. 北京:高等教育出版社,2016. 35
3 钟兆娴,罗里熊. 基础物理学手册[M]. 南宁:广西人民出版社,1983. 193 ~ 194
4 廖蕴莹,谢元栋. 重力加速度随纬度变化的精确值[J]. 物理通报,2019(10):62 ~ 64