

利用刚体的平面平行运动证明平行轴定理*

申庆徽 陈 兵

(山东科技大学电子信息工程学院 山东 青岛 266590)

(收稿日期:2020-06-02)

摘 要:平行轴定理是刚体转动部分的重要知识点,从刚体的平面平行运动模型出发,通过分析刚体运动的总动能的形式,给出了平行轴定理的一种新的证明思路.

关键词:平面平行运动 转动惯量 平行轴定理

平行轴定理是刚体转动的一个重要知识点,它反映了刚体绕相互平行的不同转轴转动时转动惯量之间的关系.在大部分的教材中对该定理的证明都是从转动惯量的定义出发^[1].本文从刚体的平面平行运动模型出发,通过分析运动的动能推出了平行轴定理.如图1所示,考虑任意刚体作平面平行运动,纯滚动要求刚体与平面之接触点在接触那一瞬间为相对静止,没有任何的相对滑动或滚动,即相对速度为零,此接触点即为速度瞬心.此时,刚体可以看成绕通过该瞬心的转轴转动,且转动的角速度为 ω .设该刚体绕垂直于平面且通过瞬心转轴的转动惯量为 I_O ,则刚体运动的总动能为

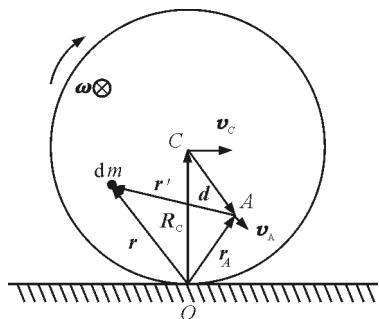


图1 刚体的纯滚动模型

$$E_k = \frac{1}{2} I_O \omega^2 \quad (1)$$

另一方面,由柯尼希定理可知刚体平面平行运动的总动能等于质心的动能与刚体绕质心的转动动能之和^[2],即

$$E_k = \frac{1}{2} I_C \omega^2 + \frac{1}{2} m v_C^2 \quad (2)$$

其中, I_C 为刚体绕过质心 C 轴的转动惯量, m 为刚体的质量, v_C 为刚体质心 C 平动速度的大小.由于平面平行运动刚体的角速度与相互平行的转轴位置无关^[3],即质心平动的速度

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_C$$

$$v_C = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_C| = \omega R_C$$

代入式(2)可得

$$E_k = \frac{1}{2} I_C \omega^2 + \frac{1}{2} m (\omega R_C)^2 = \frac{1}{2} I_C \omega^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 R_C^2 = \frac{1}{2} (I_C + m R_C^2) \omega^2 \quad (3)$$

对比式(1)和式(3)不难发现

$$I_O = I_C + m R_C^2 \quad (4)$$

此即平行轴定理.

上述分析并非只适用于转动瞬心的转动惯量与质心转动惯量之间的关系,还可以推广到任意情况.在图1中,考虑任意转轴 A ,设其相对瞬心的位置矢量为 \mathbf{r}_A ,相对于质心的位置矢量为 \mathbf{d} .设质元 dm 相对于 O 点的位置矢量为 \mathbf{r} ,根据前面的讨论知,质元 dm 的线速度为 $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.根据动能的定义

$$E_k = \frac{1}{2} \int dm v^2 = \frac{1}{2} \int dm \omega^2 r^2 \quad (5)$$

以 A 为参考点刚体的动能表达形式可以写为

$$E_k = \frac{1}{2} \int dm \omega^2 (|\mathbf{r}_A + \mathbf{r}'|)^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 r_A^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \int dm r'^2 + \omega^2 \int dm \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}_A \quad (6)$$

上式中, $\int dm r'^2$ 表示刚体绕转轴 A 的转动惯量,记

* 山东科技大学群星计划项目资助,项目编号:QX2018M40

作者简介:申庆徽(1980-),女,硕士,讲师,主要从事物理教学和物理理论研究工作.

为 I_A , 即 $I_A = \int dm r'^2$. 根据质心的定义式, $\frac{\int dm r'}{m} = (\mathbf{R}_C - \mathbf{r}_A)$ 即质心 C 相对于转轴 A 点的位置矢量. 并注意到式(6)右边第三项积分时 \mathbf{r}_A 为常矢量, 该项分子分母同乘以刚体质量 m , 则式(6)可化简为

$$E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 r_A^2 + \frac{1}{2} I_A \omega^2 + m \omega^2 (\mathbf{R}_C - \mathbf{r}_A) \cdot \mathbf{r}_A \quad (7)$$

上式等号右边第一项可以理解为转轴 A 的平动动能, 第二项表示刚体绕转轴 A 的转动动能, 第三项表示对前两项动能的补偿量. 不难看出, 当 $\mathbf{r}_A = \mathbf{R}_C$ 时即 A 点与质心 C 重合, 式(7)即为柯尼希定理; 当 \mathbf{r}_A

$= 0$ 时, 即 A 点与速度瞬心 O 重合, 式(7)退化式为(1). 此外, 比较式(7)与式(3)可得

$$I_A + m r_A^2 + 2m(\mathbf{R}_C - \mathbf{r}_A) \cdot \mathbf{r}_A = I_C + m R_C^2 \quad (8)$$

整理得

$$I_A = I_C + m (|\mathbf{R}_C - \mathbf{r}_A|)^2 = I_C + m d^2 \quad (9)$$

此即刚体绕任意转轴 A 的转动惯量与质心转动惯量之间的关系, 也就是平行轴定理.

参考文献

- 1 张三慧. 大学物理学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008
- 2 周衍柏. 理论力学教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018
- 3 张戡. 平面运动刚体的角速度与基点选择无关的证明[J]. 大学物理, 1982, 1(12): 4

Using Plane Parallel Motion of Rigid Body to Prove the Parallel Axis Theorem

Shen Qinghui Chen Bing

(College of Electric and Information Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590)

Abstract: Parallel axis theorem is an important knowledge point in rigid body dynamics. In this paper, we give a proof of parallel axis theorem, using the model of plane-parallel motion of rigid body.

Key words: plane-parallel motion; moment of inertia; parallel axis theorem

(上接第30页)

11 鱼海涛, 王亚民, 张涛. 新工科背景下的大学物理 PBL

教学: 以刚体的动量矩守恒定律为例[J]. 物理与工程, 2018, 28(S1): 33 ~ 36

Research on Kinetic Theory of Gases Teaching Based on PBL Teaching Method of Concept Map

Chen Hua Du Yongsheng Zhao Zengru Liu Jia Li Yongzhi

(College of Science, Inner Mongolia University of Science & Technology, Baotou, Neimenggu 014010)

Abstract: Problem-based learning (PBL) is a teaching method that mobilizes the initiative and enthusiasm of students for learning, while cultivating students to explore and answer questions. This paper focuses on the chapter on the kinetic theory of gas in college physics, and discusses how to use the PBL teaching method based on conceptual map in the course of large classes in university of technology. The research results show that the combination of PBL teaching methods before, during and after class can improve the initiative of students. By exploring and solving unknown problems, it can effectively increase students' interest in physics. Especially for top talents. PBL is a very effective teaching method.

Key words: problem-based learning teaching method; college physics; kinetic theory of gas; conceptual map