竞赛与物理专题研修

堆积刚性链条下降的多次碰撞求解*

赵　斌　吴庆春　汪连城　金远伟
（南京工程学院数理部　江苏 南京　100875）

（收稿日期：2020－06－22）

摘　要：针对大学物理中堆积链条的下降问题，引入了空间位置上速度跳跃间断点的描述，利用完全非弹性碰撞的模型细致推导了下落过程中每下降一段链条的机械能量损失和多次碰撞后的总机械能损失，明确给出了下降 n 段链条的速度、下落时间，讨论了从离散到连续的极限过渡.

关键词：变质量体系　下降链条运动　非弹性碰撞　机械能损失

链条下落运动是典型的变质量体系，一直备受广大师生的关注，它也是大学物理“质点系动量定理”教学中常选用的典型问题[1,2]. 链条下落时，没有碰撞时是自由下落(图 1). 文献[2]指出了这一下落过程中能量损失的原因是链条间的非弹性碰撞. 本文仍只考虑下落速度与下落链条长度的函数关系，我们采用碰撞的节点处速度是不连续的描述，即引入第一类间断点或者跳跃间断点. 由于链条是刚性，链条碰撞过程是完全非弹性碰撞，我们细致推导给出了下降过程中每下降一段链条的能量损失和下落过程的总能量损失，并计算了下落时间、加速度. 当链条分段足够小时，即通过求极限给出了柔软绳的结果.

1　链条下落问题和动量定理的求解

为了后面工作的对比参考，这里我们首先简介一下大学物理中链条下落问题和动量定理的求解过程[2]. 如图 1 所示，初始一柔软刚性链条单位长度的质量为 λ，链条放在有一小孔的桌上，链条一端由小孔稍伸下，其余部分堆在小孔周围. 由于某种扰动，链条因自身重量开始下落. 求链条下落速度 v 与下落距离 y 之间的关系.

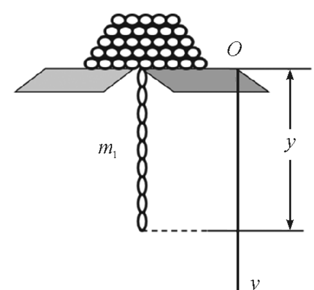

图 1　柔软链条下落示意图，竖直向下为 Oy 轴正向

设各处摩擦均不计，且认为链条软得可以自由伸开. 动量定理的求解如下：在 t 时刻，设链条的下垂长度为 y，下落速度为 v，下垂部分的质量 $m_1=\lambda y$. 该部分链条的动量

$$p=\lambda y v$$

外力冲量

$$F^{ex}\mathrm{d}t=m_1 g\mathrm{d}t=\lambda y g\,\mathrm{d}t$$

利用质点系的动量定理（$F^{ex}\mathrm{d}t=\mathrm{d}p$）有

$$\lambda y g\,\mathrm{d}t=\lambda\,\mathrm{d}(yv)$$

上式两边同时乘以 v，得到

$$\lambda g y\,\mathrm{d}y=\lambda v\,\mathrm{d}(yv)$$

替换变量，两边积分

$$\int_0^{\lambda y v}p\,\mathrm{d}p=\lambda^2 g\int_0^y y^2\,\mathrm{d}y$$

---

* 江苏省青蓝工程，国家自然科学基金资助，项目编号：11275202

作者简介：赵斌（1980－　），男，博士，主要从事惯性约束聚变与大学物理教学的研究.

给出了 v 与 y 的关系

$$v=\left(\frac{2}{3}gy\right)^{\frac{1}{2}}$$

由此算出下落长度为 y 的过程中机械能总的损失为

$$E^{\text{loss}}=\frac{1}{2}\lambda g y^2-\frac{1}{2}\lambda y v^2=\frac{\lambda g y^2}{6}$$

2 多次碰撞下落的求解模型

假设均匀、离散的链条每一截链的长度为 Δl，质量为 m_0，则单位长度的质量

$$\lambda=\frac{m_0}{\Delta l}$$

在第 t_i时刻，下垂了 i 节链条，此时，该下垂部分的长度 $i\Delta l$，记为位置坐标 $y_i=i\Delta l$，质量为 $im_0=\lambda y_i$. 由于下落中的碰撞过程，位置 y_i 点，速度不连续，即此位置处左右极限不相等，为跳跃间断点，记为

$$v_{i-}=\lim_{y\to y_{i-}}v(y)\qquad v_{i+}=\lim_{y\to y_{i+}}v(y)$$

这里用速度在 y_i 处的左右极限表示该位置发生碰撞前后的速度值，由于是刚性链条，碰撞前后下落链条的质量从 im_0 变成$(i+1)m_0$. 在这个过程中第$(i+1)$ 段小链条突然受到了已下落 i 节链条的脉冲力，然后整体一起下落运动. 这可以视为一个碰撞过程，而且是完全非弹性碰撞. 碰撞前后速度发生了跃变，即在同一位置处速度不连续，为间断点. 根据动量守恒，则碰撞前后瞬间的速度关系为

$$v_{i+}=\frac{iv_{i-}}{i+1}$$

显然 $i=1$ 时候，第一节链条质心下落$\frac{\Delta l}{2}$，速度为

$$v_{1-}=\sqrt{g\Delta l}\qquad v_{1+}=\frac{\sqrt{g\Delta l}}{2}$$

考虑第 $i(i\geqslant 2)$ 节链条从 y_{i+} 到 $y_{(i+1)-}$ 的下落过程中[y_{i+} 表示在位置 y_i 完成碰撞，$y_{(i+1)-}$ 表示在 $y_{(i+1)}$ 处还未碰撞，$y_i=y_{i-}=y_{i+}$]，整体做自由落体运动，有

$$v_{(i+1)-}^2-v_{i+}^2=2g\Delta l \tag{1}$$

于是利用式(1) 和上面的动量守恒得到的 v_{i-} 和 v_{i+} 递推关系，我们可以计算出

$$\frac{v_{i-}^2}{g\Delta l}=\frac{(i-1)^2}{i^2}\frac{v_{(i-1)-}^2}{g\Delta l}+2=$$

$$\frac{(i-1)^2}{i^2}\frac{(i-2)^2}{(i-1)^2}\cdot\cdots\cdot\frac{2^2}{3^2}\frac{1^2}{2^2}+$$

$$2\frac{(i-1)^2}{i^2}\frac{(i-2)^2}{(i-1)^2}\cdot\cdots\cdot\frac{2^2}{3^2}+\cdots+$$

$$2\frac{(i-1)^2}{i^2}+2$$

利用数列求和公式[3] 可以得到

$$\frac{v_{i-}^2}{g\Delta l}=\frac{i(i+1)(2i+1)-3}{3i^2} \tag{2}$$

$$\frac{v_{i+}^2}{g\Delta l}=\frac{i^2}{(i+1)^2}\frac{i(i+1)(2i+1)-3}{3i^2} \tag{3}$$

在 i 足够大的极限情况下，式(2)、(3) 同时趋近于连续的计算表达

$$v=\left(\frac{2}{3}gy\right)^{\frac{1}{2}}$$

利用式(2)、(3)，我们可以很容易计算第 i 次完全非弹性碰撞过程损失的机械能 δe_i

$$\delta e_i=\frac{1}{2}im_0v_{i-}^2-\frac{1}{2}(i+1)m_0v_{i+}^2=$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2i+1}{3}-\frac{1}{i(i+1)}\right]m_0 g\Delta l \tag{4}$$

由于非弹性碰撞，损失的机械能量转化为热. 第 i 次下落过程中，i 节链条先是整体自由下落 Δl，获得的动能增加为 $\lambda g y_i\Delta l$，随后第 i 碰撞损失的机械能为 δe_i，δe_i 相对于第 $i(i\geqslant 2)$ 次下落获得的动能之比(ξ_i) 为

$$\xi_i=\frac{\delta e_i}{\lambda g y_i\Delta l}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6i}-\frac{1}{i^2(i+1)} \tag{5}$$

式中 ξ_i 可视为第 i 次下落过程损失的能量比例，可以看出这一比例随着 i 的增大而减小. 当 i 足够大时，趋近于极限值$\frac{1}{3}$. 由前面连续能量损失公式

$$E^{\text{loss}}=\frac{\lambda g y^2}{6}$$

的微分可以得到

$$\frac{dE^{\text{loss}}}{\lambda g y\,dy}=\frac{1}{3}$$

可以看出这与式(5) 的极限表述是一致的.

利用表达式(4)，我们对 i 求和可以计算下落到 y_n 位置链条总共损失的机械能

$$E_n^{\text{loss}}=\sum_{i=1}^{n}\delta e_i=\frac{1}{2}\left(\frac{n^2}{3}+\frac{2n}{3}-\frac{n}{n+1}\right)m_0 g\Delta l$$

整理可以写成

$$E_n^{\text{loss}}=\lambda y_n^2 g\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{3n}-\frac{1}{2n(n+1)}\right] \tag{6}$$

我们发现式(6)对所有 n 都成立(包括 $n=1$),当 n 足够大时,式(6)正是前面动量定理给出的结果.

由下落速度的表达式(2)、(3)可以计算第 i 次下落需要的时间 Δt_i,由于第 i 次下落过程中,i 截链条整体自由下落 Δl,速度由 $v_{(i-1)+}$ 增大到 v_{i-},则

$$\Delta t_i = \frac{v_{i-} - v_{(i-1)+}}{g} \tag{7}$$

同样,通过求和得到下落到 y_n 处的需要下落时间

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i = \frac{1}{g}\left[\sum_{i=1}^{n} v_{i-} - \sum_{i=2}^{n} v_{(i-1)-} \frac{i-1}{i}\right] =$$

$$\frac{1}{g} v_{n-} + \frac{1}{g} \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} v_{(i-1)-} =$$

$$\sqrt{\frac{n\Delta l}{g}} \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)-3}{3n^3}} +$$

$$\sqrt{\frac{n\Delta l}{g}} \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i\sqrt{n}} \sqrt{\frac{i(i-1)(2i-1)-3}{3(i-1)^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{y_i}{g}}\left[\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)-3}{3n^3}} + \right.$$

$$\left. \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i\sqrt{n}} \sqrt{\frac{i(i-1)(2i-1)-3}{3(i-1)^2}}\right] \tag{8}$$

表达式(8)是下落 n 段链条需要的时间. 对于不同的 n 值,可以计算得到

$$t_1 = \left(\frac{y_1}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad t_2 = \left(\frac{2y_2}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \cdots$$

随着 n 增大,表达式(8)是收敛的. 由连续软绳的计算结果

$$v = \left(\frac{2}{3} g y\right)^{\frac{1}{2}}$$

可以得到下落的加速度

$$a = \frac{g}{3}$$

下落时间与下落位移 y 的函数关系为

$$t = \left(\frac{6y}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

令 $y = y_n$,定义相对误差

$$\delta t_n = \frac{(t - t_n)}{t}$$

我们可以通过数值计算相对误差来考察表达式(8)的收敛性:$n=1000$,$\delta t_n = 0.023$;$n = 10^5$,$\delta t_n = 0.0024$;$n = 10^6$,$\delta t_n = 7.5\mathrm{e}-4$. 可以看出当 n 趋近无穷大时,表达式(8)收敛为

$$t = \left(\frac{6y}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

前文已经提到,在刚性链条下落的过程中,除去下落节点的位置处,下落的加速度都是 g. 由于我们引入了速度间断的模型,自然会导致下落节点的加速度是奇点. 这里我们可以通过定义一个链条下落过程的平均加速度来回避节点的奇性. 定义第 i 个链条完整下落过程的平均加速度

$$\bar{a}_i = \frac{[v_{i+} - v_{(i-1)+}]}{\Delta t_i} \tag{9}$$

由于是刚性链条,碰撞是瞬时的,将式(7)的下落时间代入式(9)可以得到

$$\bar{a}_i = \frac{\left[\left(\frac{i}{i+1}\right) v_{i-} - v_{(i-1)+}\right]}{v_{i-} - v_{(i-1)+}} g =$$

$$g - \frac{1}{(i+1)} \frac{v_{i-}[v_{i-} + v_{(i-1)+}]}{2g\Delta l} g =$$

$$g - \frac{1}{2} g \frac{i(i+1)(2i+1)-3}{3(i+1)i^2} -$$

$$\frac{1}{2} g \sqrt{\frac{i(i+1)(2i+1)-3}{3(i+1)i^2}} \cdot$$

$$\sqrt{\frac{i(i-1)(2i-1)-3}{3(i+1)(i-1)^2}} \tag{10}$$

可以看出,当 i 足够大的情况下,式(10)收敛与 $\frac{1}{3} g$,即当 Δt_i 趋近零,或者 $y_{i+} - y_{(i-1)+}$ 趋近零时,链条模型退化为连续的软绳,加速度的表述在空间上连续.

3　结论

我们严格推导了堆积刚性链条下降的多次碰撞求解的明确表达,给出了从离散到连续的数学表述. 其中一系列完全非弹性碰撞的严格计算有助于学生理解相关变质量系统的物理过程,以及培养学生建立不同数学模型求解物理问题的能力.

参 考 文 献

1　马文蔚,周雨青. 物理学・上册(第 6 版)[M]. 北京:高等教育出版社,2014. 60 ~ 61

2　郑国安. 下降链条的能量损失[J]. 物理教师,2005,26(5):41 ~ 42

3　埃伯哈德,蔡德勒. 数学指南:实用数学手册[M]. 李文林,译. 北京:科学出版社,2013