关于轻杆上的力方向的思考

余　辉

（乌鲁木齐八一中学　新疆 乌鲁木齐　830002）

（收稿日期:2020－08－18）

摘　要:轻杆上的力的方向问题一直是高中物理比较难理解的问题,以一道经典的高考题切入,利用竞赛中常用的角动量定理解释了圆周运动中轻杆模型的疑惑,并且进一步拓展解释了题目中常见的模型.

关键词:轻杆模型　角动量定理　转动惯量

1　轻杆上力的认识

高中物理中,在弹力这一节第一次认识轻杆模型,我们知道它不同于轻绳模型,它的力可以沿着杆向里,也可以沿着杆向外,也可以不沿杆. 所以一开始它就和轻绳同时出现,对比着学习来记忆.学生一开始学到这里会觉得杆模型难以理解,做题时不容易判断杆上力的方向.常见出题模型如下.

（1）图 1 中左侧为墙壁,轻绳一端固定在墙上,通过光滑定滑轮吊一个重物,轻杆左端固定在墙上,右端固定轻质定滑轮.

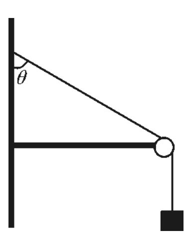

图 1　常见出题模型一

（2）图 2 中左侧为墙壁,轻杆左端通过铰链拴接在墙上,右端分别与两根轻绳相连.

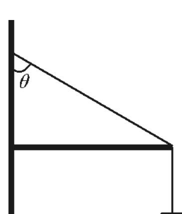

图 2　常见出题模型二

两个图中物体质量均为 m,轻绳与墙壁夹角均为 $\theta = 60°$,重力加速度为 g,求解轻杆对轻绳的弹力.

分析:图 1 中轻杆无法转动,所以轻杆右端受到的力可以沿着杆也可以不沿杆,又因为右端是光滑的滑轮,所以绳子拉力大小处处相等,对绳子上与滑轮接触点受力分析如图 3 所示,从而求得绳子拉力 T 大小为 mg,方向向左上方与水平方向夹角为 $30°$,由平衡条件,轻杆上的滑轮对轻绳的弹力 F 大小为 mg,向右上方,与水平方向夹角为 $30°$.

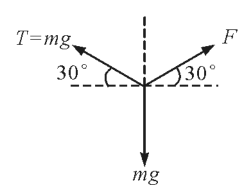

图 3　图 1 中绳子上与滑轮接触点受力分析

图 2 中轻杆可以转动,如果轻杆右端受力不沿杆,则垂直于轻杆方向有分力,力矩不为零,轻杆就会绕左端铰链转动.题目中轻杆静止,所以轻杆右端受到的力必然沿杆,受力分析如图 4 所示,利用平行四边形法则可以求出轻杆弹力 $N = \sqrt{3}\,mg$,方向水平向右.

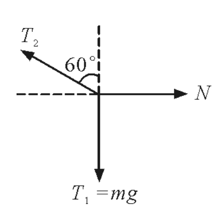

图 4　图 2 中轻绳上与轻杆右端接触点受力分析

这是关于轻杆的非常经典的习题,轻杆上的力是否沿杆是一个难点.正因为这个难点,在后面的圆周运动的学习中会碰到类似的难点问题.

作者简介:余辉(1990－　),男,硕士,中级教师,研究方向为高中物理教学.

2　圆周运动中轻杆模型的疑惑

生活中的圆周运动一节我们认识了绳模型以及杆模型，即在轻绳或轻杆的束缚下在竖直平面内做圆周运动的问题，如图 5 所示，一般只研究最高点以及最低点. 若是轻绳，由于 m 在最高点受重力以及指向圆心的绳子拉力，所以提供向心力的最小值为 mg，利用向心力公式可以求出最高点时最小速度为 $\sqrt{Rg}$（R 为圆半径）. 之后在讲解时自然而然过渡到杆模型，轻杆和轻绳不同，可以提供向外的支持力，所以在最高点小球受合力最小可以为零（轻杆沿杆向上的弹力与重力大小相等），所以若是轻杆，在最高点小球速度最小可以为零. 这是一个很自然的过渡，但是我们却很少考虑一个问题：最高点时轻杆的弹力为何一定会沿着杆呢？竖直面内的圆周运动是变速的，小球受到的合力并不一定指向圆心，所以最高点时轻杆给小球的弹力完全可以不沿杆，这样在切线方向上轻杆弹力就可以有切向分力来改变小球速度的大小.

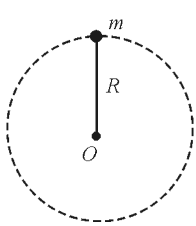

图 5　竖直平面内圆周运动模型

往常讲解时，由于绳模型造成的思维定式，学生往往不会有疑惑，甚至作为教师，我们自己也忽略了这个问题，但是偶尔还是会有学生来询问，那么接下来我们就来解决一下这个问题. 首先，介绍一下角动量定理：$M=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$，其中 M 为力矩，L 为角动量，t 为时间，公式意义为力矩是角动量关于时间的微分. 角动量 L 如果用转动惯量来表示，则 $L=I\omega$，其中 I 为转动惯量，ω 为角速度. 带入角动量定理得：$M=I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=I\beta$，其中 β 为角加速度. 圆周运动中切向加速度 $a_t=R\beta$，其中 R 为圆周运动半径.

图 5 中，以圆心为转轴，在最高点时轻杆与小球系统受到重力过圆心，所以力矩 M 为零，系统转动惯量 $I=mR^2$（忽略轻杆质量）不为零，则根据公式 $M=I\beta$ 知 $\beta=0$，再根据公式 $a_t=R\beta$ 可知切向加速度为零，则最高点时切向没有加速度，也就没有力的作用，轻杆给小球的力一定沿着杆. 这样就解决了我们之前的疑惑.

3　拓展

接下来我们将这个问题拓展：图 5 中若是轻杆，小球在除最高点以外其他位置时轻杆给小球的力是否也一定沿着杆呢？如图 6 所示，设此时轻杆与水平方向夹角为 θ，以圆心为转轴，轻杆与小球整体受外力力矩 $M=mgR\cos\theta$，转动惯量 $I=mR^2$，由公式 $M=I\beta$ 得 $\beta=\frac{g\cos\theta}{R}$，则切向加速度 $a_t=R\beta=g\cos\theta$，接下来单独对小球受力分析，小球受重力以及轻杆的弹力，容易求得沿切线方向重力分力为 $mg\cos\theta$，那说明切线方向只有重力分力，轻杆给小球弹力为零. 切线方向轻杆对小球弹力为零，就说明整个过程中轻杆给小球弹力始终沿着杆.

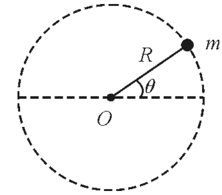

图 6　问题拓展示意图一

进一步拓展，在机械能守恒中我们常常会碰到如图 7 所示模型，轻杆两边分别连接质量为 m 和 $2m$ 的小球，轻杆可以绕位于圆心的轴无摩擦的转动，圆半径为 R，初速度为零释放，在最低点时轻杆对质量为 m 的小球弹力为多大？这个问题求解并不难，我们只需要利用机械能守恒解出 m 运动到最高点时的速度，再利用向心力公式就可以求出弹力，这里我们也是默认最高点时轻杆给小球 m 的弹力是沿着杆的. 但是在 m 向上运动过程中，轻杆给小球的力并不沿着杆，因为小球 m 动能增加，重力又对它做负功，则轻杆对小球 m 必然做正功，轻杆给的力不可能始终垂直于速度，也就是不能始终沿着杆.

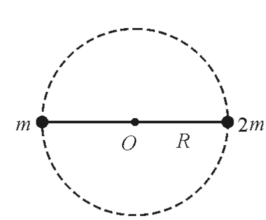

图 7　问题拓展示意图二

既然之前轻杆对小球做正功了，为什么在最高点时就默认轻杆对小球的力就沿着杆了呢？这里我们也需要利用角动量定理来解释，当 m 球转到最高点时 $2m$ 球在最低点，以圆心为轴这个整体受到外力都经过圆心，所以力矩 M 为零，则角加速度 $\beta=0$，切向加速度 $a_t=0$，则轻杆给小球的力一定沿着杆方向.

由此，我们通过竞赛中常用的角动量定理解释了我们在轻杆模型中这几点疑惑. 在教学中我们经常会碰到一些考试中不太会考到的问题，考试中几乎不出现导致我们也并不重视，但是这些问题的确是存在的，学生会问，我们自己也会很疑惑. 这时候就需要学习一些新的知识来帮我们彻底解决. 这样我们脑海中的知识体系才能完整.

Thinking about the Direction of Force on Light Rod

Yu Hui

(Urumqi Bayi Middle School，Urumqi，Xinjiang　830002)

Abstract：Aiming at the difficult problem of the direction of the force on the light pole in physics of senior high school，this paper uses a classic question in National College Entrance Examination to remove the doubts about the light rod model in circular motion through the angular momentum theorem commonly used in competitions，and explains the common models in the topic further.

Key words：light rod model；angular momentum theorem；moment of inertia

(上接第 64 页)

其状态矢量的相位角为 π.

假设全过程中经过 N 次冲击，即两物块互碰 N 次，则有方程

$$|N\rangle = P^N |0\rangle \tag{11}$$

或

$$\begin{bmatrix}\cos\pi\\ \sin\pi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos N\theta & -\sin N\theta\\ \sin N\theta & \cos N\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 0\\ \sin 0\end{bmatrix} \tag{12}$$

即 P^N 使状态矢量逆时针旋转 $N\theta$ 角，刚好使系统的状态矢量的相位角从零增加到 π，故有

$$N\theta=\pi \tag{13}$$

$$N=\frac{\pi}{\theta}=\frac{\pi}{2\arctan\frac{1}{a}}=\frac{\pi}{2\arctan\sqrt{\frac{m}{M}}} \tag{14}$$

又由于

$$\frac{M}{m}=a^2\gg 1$$

且碰撞次数为整数，故两物块相互碰撞的总次数为

$$N=\left[\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{m}}\right] \tag{15}$$

式(15) 中“[]” 为取整符号.

4　结束语

本文借助量子力学的概念，用状态矢量和矩阵算符描述系统的状态变化，使得物理方程形式简洁，意义明确；状态转换式

$$|k+1\rangle = P|k\rangle$$

从某种角度来说具有物理通用性，对于同类问题有一定的参考价值.

参考文献

1　陈怡. 碰撞出来的圆周率 —— 两球与墙壁三者间的碰撞次数与圆周率 π 间关系的讨论[J]. 物理与工程，2020，30(1)：68 ～ 72

2　程军，孙辉. 关于物块碰撞次数的探讨[J]. 大学物理，2020，39(8)：11 ～ 13

3　科恩·塔诺季，迪于，拉洛埃. 量子力学(第1卷)[M]. 北京：高等教育出版社，2014. 7

4　史蒂文 J·利昂. 线性代数(第 9 版)[M]. 北京：机械工业出版社，2015. 9