傅里叶思想的精髓及其伟大之处

蔡志东
（镇江高等专科学校丹阳师范学院　江苏 镇江　212310）

（收稿日期：2020－09－20）

摘　要：介绍了傅里叶级数和傅里叶变换的基本思想，从哲学、物理学和数学的角度阐述了其深刻涵义和伟大之处．指出了傅里叶的思想和牛顿-莱布尼茨的思想的不同之处．导出了四维协变的傅里叶变换公式．简要介绍了傅里叶级数和变换在物理学中的应用．

关键词：傅里叶思想　精髓　伟大之处　四维协变的变换公式　应用

1　傅里叶生平简介

让·巴普蒂斯·约瑟夫·傅里叶（Baron Jean Baptiste Joseph Fourier，1768 年 3 月 21 日—1830 年 5 月 16 日），法国欧塞尔人，著名数学家、物理学家．

1780 年，就读于地方军校．1795 年，任巴黎综合工科大学助教，跟随拿破仑军队远征埃及，成为伊泽尔省格伦诺布尔地方长官．1817 年，当选法国科学院院士．1822 年，担任该院终身秘书，后又任法兰西学院终身秘书和理工科大学校务委员会主席，敕封为男爵．主要贡献是在研究热的传播和热的分析理论，他所创立的一套数学理论，对 19 世纪的数学和物理学的发展都产生了深远影响．1830 年 5 月 16 日，在巴黎去世，时年 63 岁．

2　傅里叶思想的精髓及其伟大之处

2.1　傅里叶思想的精髓

傅里叶的核心思想概括起来有以下两条．

（1）任何一个复杂的函数（或描述事物变化的物理量）在一定的条件下都可以分解为许多简单的正弦或余弦函数的和．具体内容有以下 4 条．

1）任何一个周期函数（在满足所谓的“狄利克雷或狄里希利条件”下）均可以看成无穷多个（频率跃变的）正（余）弦函数之和．

用物理学的术语来讲：自然界任何一个随时间或空间做周期性变化的事物（物质系统或描述它的物理量）都可以看成无穷多个（频率跃变的）谐振动（即正弦或余弦振动）的叠加．

2）任何一个定义在有限区域上的非周期函数，均可以通过“延拓”的方法把它转化为周期函数，从而仍然可以把它看成无穷多个（频率跃变的）正（余）弦函数的叠加．

用物理学的术语来讲：自然界任何一个局限于一定空间范围内的事物，都可以看成无穷多个（频率跃变的）谐振动的叠加．

3）任何一个（定义在无限区域上的）非周期函数，都可以看成无穷多个频率连续变化的正（余）弦函数的和（积分）．

用物理学的术语来讲：自然界任何一个不受限制且表面上看似无规律的事物，都可以看成无穷多个频率连续变化的谐振动的叠加．

4）定义在无限小空间区域（即一个点）上的非周期函数（即所谓的 δ 函数），可以看成无穷多个频率连续变化的正（余）弦函数的和（积分）．

用物理学的术语来讲：自然界任何一个可以视作点的事物（如质点、点电荷等）都可以看成无穷多个频率连续变化的谐振动的叠加．

（2）世界的本原是一种（谐）振动，静止或不变只是一种表面现象，（周期性）变化才是世界的本原．

作者简介：蔡志东（1962－　），男，教授，主要从事物理教学的研究工作．

2.2　傅里叶的思想和牛顿-莱布尼茨思想的不同之处

傅里叶首先是一个物理学家，他在求解热传导方程时，创立了一套数学理论（核心即傅里叶变换），解决了一类偏微分方程的定解问题.这一点和牛顿颇为相似.牛顿在解决引力问题时，创立了一种新的数学工具 —— 微积分，在开普勒三定律的基础上导出了引力的基本公式，并进而推广为万有引力定律.但是，他们两个的思维方式是不同的.

牛顿认为，不变是世界的本原.微积分的核心思想就是用无穷多个无限小的直线段来代替曲线（每个直线段的斜率是不变的），即变化的曲线可以看成许多（斜率）“不变的直线”组合而成.牛顿的绝对时空观和他的微积分的思想也有一些相似之处.尽管时间本身在不停地流逝，但是其量度（时间的长短）却是绝对不变的，而空间长度、物质质量等也是如此.总之，在牛顿的意识中，“不变”占据主导地位，变化只是一种表面现象.

而傅里叶则认为，变化才是世界的本原，即使是表面上看起来不变的水平直线，也可以看成两个相位相差 180° 的正弦或余弦函数的叠加.傅里叶当初或许仅仅把“变换”当作一种数学方法，没有想到在这“变换”的背后，隐藏着极其深刻的物理思想.

2.3　傅里叶思想的伟大之处

（1）它符合哲学的基本观点

马克思主义哲学的核心可以概括为：一个灵魂（实事求是，一分为二），二个观点（运动变化的观点和普遍联系的观点）；三大规律（对立统一、量变质变、否定之否定规律）.

首先，正弦函数在一个周期内，可以分为上下两个对称的部分（一分为二）；其次，它永远是连续变化的（符合普遍联系，运动变化的观点）；第三，正弦函数由两个既对立又统一的部分组成，当函数值变化到最高或最低点时转而反向变化，符合量变质变规律.由于是周期性变化，自然符合否定之否定规律.

同时，它也符合中国古代的哲学思想.道家学说认为，世间万物均由阴和阳所组成，阴极生阳，阳极生阴，阴阳和合，天人合一.在太极图上，阴阳分别用黑白鱼形图案表示，其变化规律和正弦函数有相似之处.

（2）它符合美学的基本原理

和谐对称是一种美，连续平滑的变化也是一种美.直线的对称性太低（而且没有变化或变化过于简单），圆的对称性太高（变化过于单调），幂函数比较复杂，对称性也不高，所以都不是很完美.

和谐通常是指两个不同的事物能够完美地组合在一起，形成一个相互依存的整体.直线、圆、幂函数（如 n 次抛物线）等都不满足这个要求，都不和谐.把两个极端（最低对称性的直线和最高对称性的圆）巧妙地组合起来，比如让半径做圆周运动，半径在水平轴和竖直轴上的投影就分别形成了余弦和正弦函数，这是一种完美的曲线，具有许多独一无二的优点（见下面第三大部分）.

（3）它符合物理学的最新观念

现代物理学最伟大的思想有两个：一是真空不空（爱因斯坦首先意识到这一点，认为没有任何场的绝对真空是不存在的，量子场论进一步证实了这一点）；二是认识到，一切粒子乃至一切物体，都不过是真实的（三维空间中的）场振动或十一维时空中的“超弦”振动，这些思想不过是傅里叶思想的进一步发展而已.

（4）它符合数学自身的特点

数学除了具有抽象性之外，还具有逻辑上的严密性和应用上的广泛性.傅里叶变换完全具有这些特点，特别是其应用的广泛性，在众多数学工具中并不多见.

3　正（余）弦函数的独特优点

概括起来，正（余）弦函数有下列 9 个优点：（1）函数本身的简单性；（2）（函数值的）有限性；（3）对称性；（4）周期性；（5）导数的简单性；（6）连续平滑变化性；（7）三参数性；（8）正交性；（9）不变中的变化性.其中最后 3 个特点尤为重要，现在简单介绍一下.

正弦函数 $y=A\sin(\omega t+\varphi)$ 中有 3 个参数：角频率 ω，振幅 A，相位 φ，可以用来表示物理系统的 3 个特征参量.比如对于一般的系统，我们关注 3 个最重要的参量：组分的性质、组分的数量或规模、组分的

结构(排列组合方式).其他的常用函数一般只有一个或两个参量,很难完整地描述物理系统.

所谓函数的正交性,即两个函数在一个周期内的积分为零,它是矢量正交(或垂直)概念的推广(两个矢量正交,则它们的内积为零).比如函数族

$1,\cos\frac{\pi x}{l},\cos\frac{2\pi x}{l},\cdots,\cos\frac{k\pi x}{l},\cdots,\sin\frac{\pi x}{l},\sin\frac{2\pi x}{l},\cdots,\sin\frac{n\pi x}{l},\cdots$ 中,任意两个函数的乘积在一个周期$[-l,l]$上的积分为零,其他常用函数不具备这个特性.正是由于这个特性,才使复杂函数能够展开为无穷多个正弦或余弦函数的和.

不变中的变化性前面已经有所提及,就是说,即使是表面上看似不变的直线,也可以看成两个相位相反的正(余)弦函数的叠加,运动变化是物质的基本属性.

4 四维协变的傅里叶变换公式

4.1 傅里叶级数的主要公式

若$f(x)$为一个周期函数,其周期为$2l$,即$f(x+2l)=f(x)$,则$f(x)$可以看成(周期相同的)无穷多个频率跃变的正(余)弦函数的和.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right) \tag{1}$$

其中的系数a_k,b_k相当于“函数矢量”$f(x)$的无穷多个分量,正(余)弦函数则相当于无穷多个“基矢”.文献[1]给出了系数的公式

$$a_k=\frac{1}{\delta_k l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x,\ (k=0,\delta_k=2,k\neq 0,\delta_k=1) \tag{2}$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x \tag{3}$$

定义在有限区域上的非周期函数,可以通过“延拓”转化为周期函数,然后用类似的方法展开为傅里叶级数.为简单起见,有时傅里叶级数也可用复数表示

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\mathrm{e}^{\frac{ik\pi x}{l}} \tag{4}$$

$$c_k=c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{e}^{-\frac{in\pi x}{l}}\mathrm{d}x \tag{5}$$

4.2 傅里叶变换(积分)的主要公式

如果$f(x)$是定义在无限区域上的非周期函数,根据文献[1]~[3]可知,可以把它展开为无穷多个频率连续变化的正弦或余弦函数之和(积分),此即所谓的傅里叶变换,其复数形式为

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}C(\omega)\mathrm{e}^{i\omega x}\mathrm{d}\omega \tag{6}$$

$$C(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\left[\mathrm{e}^{i\omega x}\right]^*\mathrm{d}x \tag{7}$$

当然也可以把式(6)、式(7)写成对称形式

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(\omega)\mathrm{e}^{i\omega x}\mathrm{d}\omega \tag{8}$$

$$\bar{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\left[\mathrm{e}^{i\omega x}\right]^*\mathrm{d}x \tag{9}$$

还可以从一维推广到三维“空间”,即将

$$\omega x\rightarrow \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=kx+ky+kz$$

同时做下列置换

$$\mathrm{d}\omega\rightarrow\mathrm{d}^3k,\mathrm{d}x\rightarrow\mathrm{d}^3x,\sqrt{2\pi}\rightarrow(\sqrt{2\pi})^3=(2\pi)^{\frac{3}{2}},$$
$$\omega\rightarrow k,x\rightarrow r.\ f(x)\rightarrow\psi(r),\bar{f}(\omega)\rightarrow\varphi(k)$$

可得三维空间的傅里叶变换公式

$$\psi(r)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(k)\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3k \tag{10}$$

$$\varphi(k)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(r)\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3x \tag{11}$$

进一步,把$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\rightarrow\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t=\frac{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)}{\hbar}$,则式(10)、式(11)可以写为

$$\psi(r,t)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(p,t)\mathrm{e}^{\frac{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)}{\hbar}}\mathrm{d}^3p \tag{12}$$

$$\varphi(p,t)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(r,t)\mathrm{e}^{\frac{-i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)}{\hbar}}\mathrm{d}^3x \tag{13}$$

式(12)和式(13)即为量子力学中最常用的变换公式[4].

4.3 四维协变的傅里叶变换公式

式(12)、式(13)不具有洛伦兹协变性,因为它只对三维坐标或三维动量进行变换,没有对时间和能量进行变换.下面导出洛伦兹协变的傅里叶变换公式.令四维动量矢量[5]

$$(p_\mu)=(p_1,p_2,p_3,p_4)=\left(p_x,p_y,p_z,\frac{iE}{c}\right)=\left(\boldsymbol{p},\frac{iE}{c}\right)$$

四维坐标矢量

$$(x_\mu)=(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x,y,z,ict)=(\boldsymbol{r},ict)$$

则有

$$\frac{(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r} - Et)}{\hbar} = \frac{p_\mu x_\mu}{\hbar} \tag{14}$$

上式右边采用了爱因斯坦求和约定(相同指标表示求和). 作下列替换

$$\mathrm{d}^3 p \to \mathrm{d}^4 p = \mathrm{d}p_x \mathrm{d}p_y \mathrm{d}p_z \mathrm{d}(i\frac{E}{c}), \mathrm{d}^3 x \to \mathrm{d}^4 x = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}(ict), (2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}} \to (2\pi\hbar)^2$$

式(12)、式(13) 化为

$$\psi(x_\mu) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(p_\mu)\mathrm{e}^{i\frac{p_\mu x_\mu}{\hbar}}\mathrm{d}^4 p \tag{15}$$

$$\varphi(p_\mu) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x_\mu)\mathrm{e}^{-i\frac{p_\mu x_\mu}{\hbar}}\mathrm{d}^4 x \tag{16}$$

式(15)、式(16) 即为洛伦兹协变的傅里叶变换公式,具有完美的对称性和简洁性,非常优美. 它是“四维(闵可夫斯基) 坐标空间” 和“四维动量空间” 之间的变换. 也就是说,一个空间的函数可以通过“无穷多个基本函数” 变换到另一个空间的函数,反之亦然.

与此相似,定义在无限小区域(一个点上) 的非周期函数,也可以通过傅里叶变换,展开为无穷多个正弦或余弦函数的和(积分).

5 傅里叶变换的应用领域

由于复数形式的一维傅里叶变换中,基本函数为 $\mathrm{e}^{i\omega x}$,其导数或微分后仍然是这个函数(前面多一个或几个常数),从而使线性微分方程的求解可以转化为常系数的代数方程的求解,这在数学和物理上都非常有用. 此外,著名的卷积定理指出:傅里叶变换可以化复杂的卷积运算为简单的乘积运算,从而提供了计算卷积的一种简单手段. 离散形式的傅里叶变换可以利用数字计算机快速算出. 由于这些性质以及本文第三大部分所讲的 9 个特点,使傅里叶变换在物理学、数论、组合数学、信号处理、概率、统计、密码学、声学、光学等领域都有着广泛的应用.

从军用到民用,从基础科学(如量子力学) 到应用科学(如计算机、通信、激光等).

从周期到非周期函数,从粒子到场,均可以应用傅里叶变换来解决许多实际问题. 其应用领域之广,除了微积分和微分方程之外,很少有其他工具可以和它相媲美.

很多专家说,傅里叶变换就是从时域变到频域,这是一种非常肤浅的认识,傅里叶变换所蕴含的思想之深刻,远远超越了绝大多数人的想象. 希望本文能有助于读者加深对傅里叶变换的认识.

参考文献

1 梁昆淼. 数学物理方法(第 4 版)[M]. 北京:高等教育出版社,2010

2 吴崇试. 数学物理方法(第 2 版)[M]. 北京:北京大学出版社,2003

3 程建春. 数学物理方程及其近似方法[M]. 北京:科学出版社,2004

4 曾谨言. 量子力学(第 4 版)[M]. 北京:科学出版社,2007

5 刘辽,费宝骏,张允中. 狭义相对论(第 2 版)[M]. 北京:科学出版社,2008

The Essence and Greatness of Fourier′s Thought

Cai Zhidong

(Danyang Normal University, Zhenjiang College, Zhenjiang, Jiangsu 212300)

Abstract: The basic thought of Fourier series and Fourier transform is introduced, This paper expounds the profound meaning and greatness of Fourier series and transformation from the perspective of philosophy, physics and mathematics. The difference between Fourier′s thought and Newton-Leibniz′s thought is pointed out. The four-dimensional covariant Fourier transform formula is derived. The application of Fourier series and transform in physics is briefly introduced.

Key words: Fourier′s thought; essence; greatness; four-dimensional covariant Fourier transform formula; application