简谐振动在非惯性系中的动力学分析*

米仪琳

（北方工业大学理学院　北京　100144）

（收稿日期:2020-09-23）

摘　要:简谐振动是工科大学物理教学中一个重要的教学内容.而非惯性参照系中的简谐振动在大学物理教材中鲜有涉及.学生对于非惯性系中简谐振动的条件和运动规律物理图像不清晰,容易出现认知错误.采用最简单的分析方法,引用惯性力,以弹簧振子、单摆、复摆为例对振动系统进行了动力学分析.结果发现,在非惯性系中,系统是否仍做简谐振动,取决于被选用的非惯性参照系和振动系统.振动系统不同,所在的非惯性系不同,振动条件也各不相同.在大部分情况下,系统振动的周期和角频率不再唯一地取决于振动系统,而是与非惯性系密切相关.

关键词:简谐振动　非惯性系　周期　角频率

1　引言

简谐振动是最简单、最基本的振动,任何复杂的振动都可以分为若干个简谐振动,因此在大学物理教材中重点地探讨了惯性系中简谐振动的基本规律[1~3].那么在非惯性系中,原来做简谐振动的系统是否还在做简谐振动;非惯性系需要满足什么条件;振动的周期和角频率是否还是唯一地取决于振动系统,等等.学生在理解上容易出现错误,文献中也极少涉及[4~6].本文以弹簧振子、单摆复摆为例,系统研究了在各种平动、转动非惯性参照系中,系统做简谐振动的条件和运动规律.

众所周知,当系统位于非惯性参照系中时,系统不仅受到物体间的相互作用力,还受到惯性力的作用[7,8].若选地面为 S 系,S′系相对 S 系以加速度 $\boldsymbol{a}_0$ 做加速直线运动.一运动质点相对 S 系的速度为 $\boldsymbol{v}$,相对 S′系的速度为 $\boldsymbol{v}'$,则根据牛顿的绝对时空观和伽利略的速度变换方程,运动质点的绝对加速度 $\boldsymbol{a}$、相对加速度 $\boldsymbol{a}'$ 和牵连加速度 $\boldsymbol{a}_0$ 的关系

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{a}' \tag{1}$$

若质点所受合外力为 $\boldsymbol{F}$,其运动速度远远小于光速,则质点质量 m 的相对论效应可以忽略,方程两边同时乘以标量 m

$$m\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{F}+(-m\boldsymbol{a}_0) \tag{2}$$

设 $\boldsymbol{f}^*=-m\boldsymbol{a}_0$ 是 S′系相对 S 系加速运动产生的,它是一种非相互作用力,我们把它称为惯性力[8].

当 S′系绕静止于惯性系 S 中某一点 O,以角速度 ω 转动时,质点的绝对加速度 $\boldsymbol{a}$、相对加速度 $\boldsymbol{a}'$ 的关系,则可以表示为[7]

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times r-\omega^2\boldsymbol{r}+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}' \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 是从 O 点指向质点所在位置的有向线段,$\boldsymbol{v}'$ 是质点相对 S′系的运动速度.若质点受到的合外力为 $\boldsymbol{F}$,S′系相对 S 系做匀角速转动,则在 S′系中

$$m\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{F}+m\omega^2\boldsymbol{r}-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}' \tag{4}$$

设离心力

$$\boldsymbol{f}_c^*=m\omega^2\boldsymbol{r}$$

科里奥利力

$$\boldsymbol{f}_K^*=2m\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{\omega}$$ [8]

2　加速平动参照系中谐振动系统的运动

2.1　加速运动小车中的弹簧振子

一劲度系数为 κ 的轻弹簧连接一质量为 m 的小球(小球可以看做质点),竖直悬挂于小车内,小车在光滑水平面上以加速度 $\boldsymbol{a}$ 运动,如图 1 所示.下面我们分析弹簧振子的运动情况.

* 北方工业大学教育教学改革和课程建设研究重点项目"大类招生背景下物理学对创新型人才培养的研究——以大学物理模块 IV 为例",项目编号:NCUT2017JGZ017

作者简介:米仪琳(1972-　),女,博士,副教授,主要从事大学物理教育教学工作,研究方向为凝聚态物理.

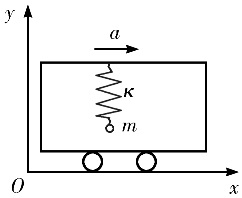

图 1　加速运动小车里的弹簧振子

选地面为 S 系，相对地面加速运动的小车为 S′系. 在 S 系建立 xOy 直角坐标系，小车沿 x 轴正向加速运动. 以弹簧振子受力为零的位置即平衡位置为坐标原点，平行弹簧振子方向为 $O'x'$ 轴，在 S′系建立 $x'O'y'$ 坐标系，如图 2 所示.

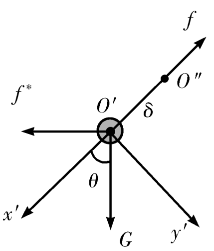

图 2　弹簧振子位于平衡位置的受力分析

弹簧振子位于平衡位置 O' 点时，假设弹簧伸长 δ，则在 O' 点

$$-\kappa\delta+ma\sin\theta+mg\cos\theta=0 \tag{5}$$

$$mg\sin\theta-ma\cos\theta=0 \tag{6}$$

则

$$\tan\theta=\frac{a}{g} \tag{7}$$

如果小车运动的加速度 a 发生变化，弹簧振子的平衡位置会随着加速度 a 的改变而改变，弹簧振子不再是围绕平衡位置做往复运动. 因此，只有小车匀加速运动时，弹簧振子的平衡位置才不随时间发生变化，弹簧振子和竖直方向的夹角 θ 是固定的，这时系统才有可能做简谐振动.

沿 x' 轴方向，将弹簧振子拉离平衡位置. 假设某一时刻，弹簧振子位于坐标 x' 处，分析小球的受力情况. 该时刻弹簧振子相对竖直位置偏离 θ'，则根据式(2)，有

$$-\kappa(\delta+x')+ma\sin\theta'+mg\cos\theta'=m\ddot{x}' \tag{8}$$

$$mg\sin\theta'-ma\cos\theta'=0 \tag{9}$$

由式(7)、式(9)，得出

$$\tan\theta'=\tan\theta=\frac{a}{g}$$

$$\theta=\theta' \tag{10}$$

式(10)说明弹簧振子在沿 x' 轴方向运动时，弹簧振子和竖直方向的夹角 θ 和它的运动状态无关.

由式(5)～(10)可以得出

$$\ddot{x}'+\frac{\kappa}{m}x'=0 \tag{11}$$

令 $\omega=\sqrt{\frac{\kappa}{m}}$，则弹簧振子的运动方程

$$x=A\cos(\omega t+\varphi) \tag{12}$$

振动周期

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\kappa}} \tag{13}$$

由式(5)～(13)得出，在相对地面匀加速平动的小车上，竖直悬挂的弹簧振子仍会围绕平衡位置做简谐振动，其平衡位置与竖直方向有一夹角 θ，θ 角取决于小车的加速度和弹簧振子所在位置的重力加速度；而振动角频率和周期只取决于振动系统，与小车运动的加速度无关.

采用与上述类似的方法，可以推导出，弹簧振子处于竖直加速平动参照系中(如，弹簧振子悬挂于竖直加速下降的电梯里)时，弹簧振子仍做简谐振动，并且振动角频率、周期只与振动系统有关.

2.2　斜面上的单摆

一倾角为 θ(θ 很小) 的斜面，静止在水平面上. 车沿着斜面以加速度 $\boldsymbol{a}$ 自顶端滑下，单摆位于一小车内，单摆摆长 l，摆球质量为 m. 下面我们讨论单摆的运动情况.

选地面为 S 系，沿斜面加速运动的小车为 S′系. 在 S′系建立 xOy 直角坐标系，x 轴沿斜面方向，y 轴沿垂直斜面方向，如图 3 所示.

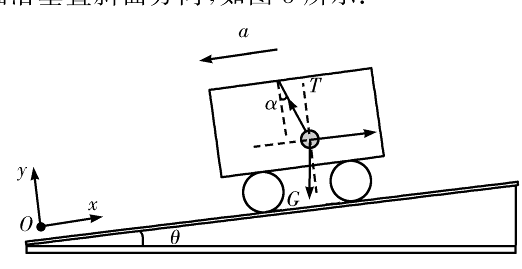

图 3　小车沿斜面加速运动时，单摆位于平衡位置的受力分析

在 S′系观察，某时刻单摆所受合力为零，单摆处于平衡位置，此时，单摆和 y 轴正向夹角 α. 将单摆受力向 x 轴、y 轴方向分解

$$ma-mg\sin\theta-T\sin\alpha=0 \tag{14}$$

$$T\cos\alpha-mg\cos\theta=0 \tag{15}$$

则在小车相对斜面加速运动时，若悬挂于小车上的单摆处于平衡位置，单摆和 y 轴正向之间的夹角 α

满足

$$\tan\alpha=\frac{a-g\sin\theta}{g\cos\theta} \tag{16}$$

斜面倾角 θ 很小，则

$$\tan\alpha\approx\frac{a-g\theta}{g} \tag{17}$$

若小车沿斜面加速运动时，加速度 a 随时间发生变化，则单摆的平衡位置也会随着加速度 a 发生变化，单摆将不再做简谐振动.

假设小车沿斜面做匀加速运动，将单摆拉离平衡位置，单摆开始运动，某一时刻单摆偏离平衡位置 Θ，如图 4 所示，单摆和 y 轴方向之间的夹角为 $\alpha+\Theta$，在 S′系建立自然坐标系，取逆时针方向为转动正方向.

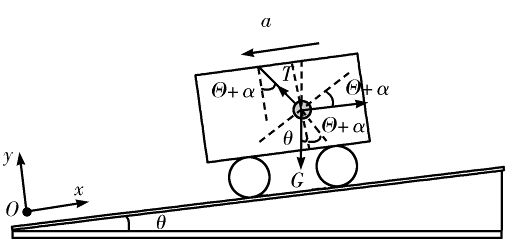

图 4　小车沿斜面匀加速运动时，单摆的受力分析

分析单摆的受力情况，列出其动力学方程

$$ma\cos(\alpha+\Theta)-mg\sin(\alpha+\Theta+\theta)=ml\ddot{\Theta} \tag{18}$$

$$T-ma\sin(\Theta+\alpha)-mg\cos(\Theta+\alpha+\theta)=ml\dot{\Theta}^2 \tag{19}$$

由式(18)得出

$$\ddot{\Theta}+\frac{g}{l}\sin(\alpha+\Theta+\theta)-\frac{a}{l}\cos(\alpha+\Theta)=0 \tag{20}$$

若单摆偏离平衡位置的角度 Θ 很小，α 也很小，斜面倾角 θ 也很小，则由式(14)～(20)得到

$$\ddot{\Theta}+\frac{g}{l}\Theta=0 \tag{21}$$

令 $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$，则单摆的运动学方程

$$\Theta=\Theta_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi) \tag{22}$$

单摆运动的周期

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{23}$$

式(14)～(23)说明，在单摆摆角 Θ、斜面倾角 θ 很小，并且 α 也很小的情况下，单摆做简谐振动，并且其振动的角频率 ω、周期 T 只取决于振动系统. 在这里 α 是单摆处于平衡位置时和 y 轴方向的夹角，由式(17)可以看出 α 与小车运动的加速度密切相关. α 很小，则要求小车运动的加速度满足

$$a-g\theta\ll g \tag{24}$$

即当 $a\ll g$ 时，单摆的运动才是简谐振动.

如果斜面倾角 $\theta=0$，则对应着单摆悬挂在小车上，小车在地面上沿水平方向以恒定加速度运动的情况，如图 5 所示.

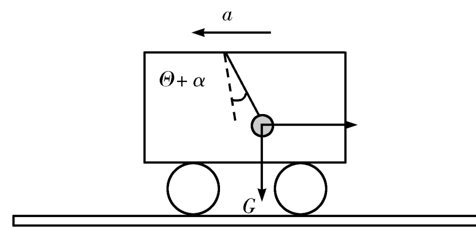

图 5　小车在水平面上匀加速运动时，单摆的受力分析

单摆处于平衡位置时，和竖直方向的夹角 α，由式(17) 可以看出，此时

$$\tan\alpha=\frac{a}{g} \tag{25}$$

将单摆拉离平衡位置 Θ，由式(18)、(19)可以给出在自然坐标系中，单摆的动力学方程

$$\ddot{\Theta}+\frac{g}{l}\sin(\alpha+\Theta)-\frac{a}{l}\cos(\alpha+\Theta)=0 \tag{26}$$

在单摆摆角 Θ 很小，单摆处于平衡位置时，和竖直方向的夹角 α 也很小时，令 $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$，则单摆的运动学方程

$$\Theta=\Theta_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi) \tag{27}$$

单摆运动的周期

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{28}$$

单摆此时做简谐振动. 由式(24)可以得出，α 很小，则要求

$$a\ll g \tag{29}$$

由以上的讨论可以看出，无论小车是在地面上，还是在静止的斜面上做匀加速运动，当小车运动的加速度 a 远远小于重力加速度 g，并且单摆摆角 Θ、斜面倾角 θ 都很小的情况下，单摆在加速平动的小车内仍围绕其平衡位置做简谐振动，振动周期只与振动系统和单摆所在位置的重力加速度有关，与单摆是否处于惯性系中无关.

2.3　加速运动电梯中的复摆

以加速度 $\boldsymbol{a}$ 向上运动的电梯内有一钟摆，如图

6 所示，分析钟摆的运动.

钟摆对悬挂点 O 的转动惯量为 J，质心为 C，悬挂点 O 到质心的距离 $OC=r$. 某一时刻，钟摆偏离平衡位置，与竖直方向夹角为 θ（θ 很小），如图 6 所示.

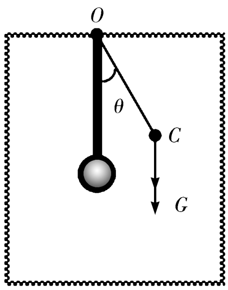

图 6　电梯加速上升时，钟摆的受力分析

以逆时针方向为转动正方向，根据刚体的角动量定理，可以得出

$$-r(mg+ma)\sin\theta=J\ddot{\theta} \tag{30}$$

令
$$\omega=\sqrt{\frac{mr(g+a)}{J}}$$

则钟摆定轴转动的动力学方程

$$\ddot{\theta}+\omega^2\theta=0 \tag{31}$$

钟摆转动的运动学方程

$$\theta=\theta_m\cos(\omega t+\varphi) \tag{32}$$

处于加速上升电梯中的钟摆，在摆角 θ 很小的情况下，仍做简谐振动. 其周期

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{J}{mr(g+a)}} \tag{33}$$

与在惯性系中不同的是，钟摆简谐振动的角频率和周期不仅与振动系统、钟摆所在位置的重力加速度 g 有关，还与电梯的加速度密切相关，钟摆简谐振动的角频率会随着电梯加速度的增大而增大.

3　转动参照系中的弹簧振子

一圆盘以角速度 ω' 绕通过盘心 C 点的竖直光滑轴转动，如图 7 所示. 一劲度系数为 κ、质量为 m 的弹簧振子固定于盘心，置于沿圆盘半径方向的光滑槽内. 分析弹簧振子的运动情况.

选地面为 S 系，匀速转动的圆盘为 S′ 系. 在 S′ 系，以弹簧振子的平衡位置为坐标原点，沿径向凹槽建立 Ox 直角坐标系，分析弹簧振子的受力情况.

在 S′ 系中观察，弹簧振子受到弹性力 $\boldsymbol{f}$、离心力 $\boldsymbol{f}_c^*$ 和科里奥利力 $\boldsymbol{f}_K^*$[8] 作用. 科里奥利力 $\boldsymbol{f}_K^*$ 方向沿垂直 Ox 轴方向，因此，沿 Ox 轴方向，弹簧振子只受到弹性力 $\boldsymbol{f}$ 和离心力 $\boldsymbol{f}_c^*$ 的作用.

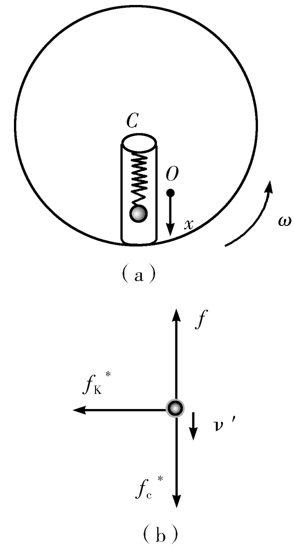

图 7　匀速转动圆盘上的弹簧振子及其受力分析

假设弹簧原长 l_0，弹簧振子处于平衡位置时，弹簧振子受力为零，弹簧伸长 δ. 则有

$$-\kappa\delta+m\omega'^2(\delta+l_0)=0 \tag{34}$$

拉伸弹簧振子离开平衡位置，某一时刻，弹簧振子处于坐标 x 处，于是

$$-\kappa(\delta+x)+m\omega'^2(\delta+l_0+x)=m\ddot{x} \tag{35}$$

弹簧振子的动力学方程

$$\ddot{x}+\frac{\kappa-m\omega'^2}{m}x=0 \tag{36}$$

令
$$\omega=\sqrt{\frac{\kappa-m\omega'^2}{m}}$$

则弹簧振子此时的运动学方程

$$x=A\cos(\omega t+\varphi) \tag{37}$$

所以，处于相对地面匀速转动的圆盘上，弹簧振子仍做简谐振动. 其周期

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{\kappa-m\omega'^2}} \tag{38}$$

因此只有当圆盘匀速转动时，弹簧振子的运动才是简谐振动，并且弹簧振子振动的角频率 ω 和周期 T 不仅与弹簧的劲度系数 κ、弹簧振子的质量 m 有关，还取决于圆盘转动的角速度 ω'，并且会随着角速度 ω' 的改变而改变. 这与弹簧振子处于惯性参照系、加速平动参照系中完全不同. 弹簧振子处于上述参照系中时，弹簧振子做简谐振动，并且振动的角频率 ω 和周期 T 只和振动系统有关，和其他因素无关. 而在转动参照系中，弹簧振子仍做简谐振动，但

振动的周期 T 和角频率 ω 与转动参照系的角速度 ω' 密切相关，不再唯一取决于振动系统弹簧振子.

4 结论

我们借助于惯性力，研究了处于不同非惯性系中的弹簧振子、单摆、复摆的运动，得出了非惯性系中简谐振动的条件和运动规律. 研究发现，当谐振动系统处于非惯性系时，系统是否仍做简谐振动，与我们所选用的非惯性参照系和振动系统密切相关. 系统只有处于匀加速平动参照系或匀速转动的参照系时，平衡位置才不随时间发生变化，系统才有可能围绕平衡位置运动. 弹簧振子无论处于匀加速平动参照系还是匀速转动的参照系中，都依旧做简谐振动. 只是在转动参照系中，弹簧振子振动的周期 T 和角频率 ω 与转动参照系的角速度 ω' 密切相关，不再唯一取决于振动系统；而处于水平加速平动参照系中的单摆，则在摆角 Θ 很小、斜面倾角 θ 很小（或 $\theta=0$），同时平动参照系加速度 a 远远小于重力加速度 g（$a \ll g$）时，系统才做简谐振动，其振动周期 T 与系统是否处于惯性系无关，仍然仅与振动系统和重力加速度 g 有关；而处于竖直加速的平动参照系中的复摆，只要是做小角度摆动，其运动就仍然是简谐振动，但是与水平加速平动参照系中的单摆不同的是，位于竖直加速的平动参照系中的复摆，其振动角频率 ω 和周期 T 不仅与振动系统、重力加速度 g 有关，还与平动参照系的加速度 a 密切相关. 本文为非惯性系中的简谐振动建立了清晰的物理图像，这将有利于加深学生对简谐振动的理解，提高学生分析问题、解决问题的能力.

参 考 文 献

1 张三慧. 大学物理学 力学、热学(第 3 版)[M]. 北京：清华大学出版社，2008. 187～205

2 马文蔚. 物理学(第 6 版)下册[M]. 北京：高等教育出版社，2014. 1～36

3 程守洙，江之永. 普通物理学(第 5 版)下册[M]. 北京：高等教育出版社，2016. 2～50

4 许钟城. 在非惯性参照系中弹簧振子的运动[J]. 河池师专学报，1987(3)：7～12

5 刘永利. 弹簧振子在直线加速参考系中的运动分析[J]. 邢台学院学报，2009，24(4)：116～117

6 郑福昌. 非惯性系中的简谐振动规律研究[J]. 红河学院学报，2013，11(2)：10～13

7 周衍柏. 理论力学教程(第 3 版)[M]. 北京：高等教育出版社，2009. 180～181

8 漆安，杜婵英. 力学[M]. 北京：高等教育出版社，1997. 111～117

The Dynamical Analysis of Simple Harmonic Vibration in a Non-Inertial Frame

Mi Yilin

(College of Science，North China University of Technology，Beijing 100144)

Abstract：Simple harmonic vibration is one important component part of the teaching system for engineering course physics. Little attention is paid to simple harmonic vibration in a non-inertial frame in the current college physical texbooks. Students are not clear about the conditions and laws of simple harmonic vibration in the non-inertial system. They can′t build correct physical images. So they tend to make cognitive errors. In this work，the simplest analysis method is adopted by employing the inertial force. The dynamic analysis of the system is carried out with the spring-vibrator，simple pendulum and compound pendulum as examples. It is found that whether the system still performs simple harmonic vibration depends on the non-inertial reference frame and vibration system we choose. If the non-inertial reference frame and vibration system are different，the conditions required for simple harmonic vibration differ from one another. The vibration cycle and corner frequency of system are no longer uniquely determined by the vibration system，but are closely related to the non-inertial system

Key words：simple harmonic vibration；non-inertial frame；cycle；corner frequency