

关于玻尔对应原理的思考

张 昶

(新疆医科大学医学工程技术学院 新疆 乌鲁木齐 830000)

(收稿日期:2020-10-09)

摘 要:文章回顾了对应原理在理解量子力学与经典力学之间关系时的重要作用,举例说明了作用量的数量级可作为量子体系与经典体系的分界.

关键词:对应原理 作用量 思考

在系统的量子力学建立之前,玻尔通过新的假设并借助经典物理学的结论得出了氢原子能级的精确公式^[1].其中,对应原理发挥了很重要的作用,它的基本内容是:在大量子数极限下,量子体系的行为将渐进地趋于经典力学体系^[2].

现在我们已经知道,量子力学和经典力学分别统治着微观世界和宏观世界,二者的理论形式有巨大差别,微观与宏观两个世界似乎被割裂了.但世界只有一个,必须有一个桥梁将二者连起来.对应原理就是这样一个桥梁.而且,如果把它的含义拓展开,就产生了理论形态可随物理条件的变化而变化的重要思想.下面举几例进行说明.

1 单体的量子力学与经典力学的过渡

1.1 经典力学与量子力学的分界

宏观与微观是相对的概念,因此很难直接通过尺度确定量子效应是否显著.普朗克将今天我们所说的普朗克常数称为作用量子,其实就给出了一个判据.玻尔在一部文集的绪论中也说道:“这些理想化在把我们的普通感官印象条理化时的适用性,依赖于实际上可以认为是无限的光速,并依赖于作用量子的微小性”^[3].经典力学中哪个量对应于作用量子(普朗克常数)呢?可以想到同名的作用量

$$S = \int_A^B \mathbf{p} \cdot d\mathbf{l} \quad (1)$$

它是动量点乘位移的一个路径积分.量纲恰好与普朗克常数一致.若力学体系作用量远大于普朗

克常数,则适用于经典力学;若作用量与普朗克常数接近或小于它,则成为量子体系.

对示波器中运动的电子与原子中的电子的作用量做一比较.

1.1.1 示波器中的电子

按加速电压为千伏数量级,根据电子的质量($m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg)和电荷量($e = 1.6 \times 10^{-19}$ C),可求出动量,而运动长度量级为 $L \sim 1$ m.再按公式 $S \sim p \cdot L$ 可得作用量的数量级为 10^{-23} J·s $\approx 10^{11} \hbar$.此时可忽略量子效应.实际上示波器中电子的运动就是按照经典力学进行计算的.

1.1.2 原子中的电子

以氢原子为例,由于角动量满足

$$mvr = pr = n\hbar \quad (2)$$

所以当 n 不大时,作用量显然与普朗克常数量级一致.此时,量子效应不可忽略.

同样是电子,由于作用量的数量级不同,支配其运动规律的物理理论迥然不同.可见作用量判据的重要性.

1.2 不确定关系(测不准关系)

海森堡不确定关系(测不准关系)直观地给出了经典力学的限度,又是用普朗克常数表示的,即

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad \Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (3)$$

那么当体系作用量远大于普朗克常数,则可以认为 $\hbar \rightarrow 0$,这时不确定关系消失,质点的动量和坐标可以同时确定.量子效应消失,成为经典体系.

2 多体系统的量子力学到经典力学的过渡

多体系统的量子效应除了其内部每个粒子运动的量子特征之外,还有一个令人惊异的特征:全同粒子的不可分辨性.使得经典体系适用于玻尔兹曼统计,而量子体系适用于玻色统计或费米统计.那么量子体系在什么情形下过渡为经典体系呢?这里又有对应原理思想的体现.

设能量 ε_l 包含的粒子的运动状态数为 ω_l (简并度), 粒子数为 a_l . 则 3 种分布分别为^[4]

$$\begin{aligned} a_l &= \omega_l e^{-\alpha - \beta \varepsilon_l} && (\text{玻尔兹曼分布}) \\ a_l &= \frac{\omega_l}{e^{\alpha + \beta \varepsilon_l} - 1} && (\text{玻色分布}) \\ a_l &= \frac{\omega_l}{e^{\alpha + \beta \varepsilon_l} + 1} && (\text{费米分布}) \end{aligned} \quad (4)$$

其中 α 和 β 与系统的化学势及温度有关. 由上式可以看出, 当 $e^\alpha \gg 1$ 时, 玻色分布与费米分布都过渡为玻尔兹曼分布, 也就是量子体系过渡为经典体系, 称为经典极限条件. 进一步, 可将它的具体物理要求表示出来. 考虑理想气体, 经典极限条件化为^[4]

$$\frac{V}{N} \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \gg 1 \quad (5)$$

变形, 可得

$$\left(\frac{V}{N} \right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{2\pi mkT} \gg h \quad (6)$$

式中 $\left(\frac{V}{N} \right)^{\frac{1}{3}} = \bar{d}$ 是分子平均间距. πkT 与分子热运动动能量级一致, 则 $\sqrt{2\pi mkT}$ 与分子热运动动量量级一致^[4]. 这样, 式(6)可写成

$$p \cdot \bar{d} \gg h \quad (7)$$

不等式左边依然是体系内单个分子热运动的作用量, 右边是普朗克作用量子. 可见, 多体系统的量子力学规律向经典力学规律过渡的关键依然是普朗克常数. 只是, 这时影响作用量的是温度和粒子的平均间距.

3 总结

由上文的分析可以看到, 量子力学与经典力学并不是毫不相干的两个理论体系, 在一定条件下可以发生过渡. 玻尔对应原理的核心内容正是相信这样一种过渡是对量子力学理论的正当要求. 就是说, 经典力学可以看做量子力学理论在体系作用量远远大于普朗克常数时的极限情形. 对应原理的思想还可进一步推广, 相对论到经典力学的过渡、波动光学到几何光学的过渡……一般地, 任何更深刻的物理理论都应当在一定条件下过渡为较为浅近然而在一定范围内高度精确的旧理论. 这种思想在探寻新理论的过程中可以提供重要的理论指导.

参考文献

- 1 Bohr N. On the constitution of atoms and molecules. Part I [J]. Philosophical Magazine, 1913(26):1 ~ 24
- 2 曾谨严. 对应原理在量子论发展中所起的作用[J]. 大学物理, 1985(9):10 ~ 14
- 3 尼耳斯·玻尔. 尼耳斯·玻尔哲学文选[M]. 戈革译. 北京:商务印书馆, 1999. 75
- 4 汪志诚. 热力学·统计物理(第3版)[M]. 北京:高等教育出版社, 2003. 245, 256 ~ 257

Thinking on Bohr's Correspondence Principle

Zhang Yang

(College of Medical Engineering and Technology, Xinjiang Medical University, Urumqi, Xinjiang 830000)

Abstract: The importance of the correspondence principle in understanding the relation between quantum mechanics and classical mechanics is reviewed in this paper, some examples are supplied for explaining that the order of magnitude of action could be considered as the boundary between quantum system and classical system.

Key words: the correspondence principle; action; reflection