



# 磁约束问题中守恒量的讨论

鲁斌 冯子江

(浙江省余姚中学 浙江 宁波 315400)

(收稿日期:2020-11-14)

**摘要:**用高斯定理、涡旋电场做功、动量定理3种方法推导了磁约束问题中满足的守恒量——磁矩守恒,3种推导方案都要求磁场随空间变化缓慢,故磁约束中的磁矩守恒是一个近似守恒量。

**关键词:**磁约束 磁矩 角动量

“磁约束”在高中物理中常有涉及.人教版物理选修3-5“核聚变”一节中提到:“带电粒子运动时在均匀磁场中会由于洛伦兹力的作用而不飞散,因此有可能利用磁场来约束参加反应的物质,这就是磁约束。”并有“环流器”的配图(图1).对于环流器的原理,我们往往从“磁镜”的角度入手.本文提供两个方案推导磁约束问题中的守恒量,并给出需要满足的条件.

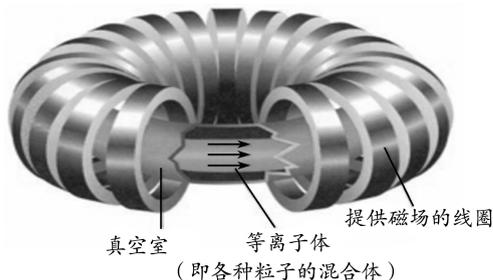


图1 环流器(即 tokamak)

## 1 从高斯定理到磁矩守恒

### 1.1 高斯定理

如图2所示,空间中有“磁镜”结构的磁场分布,在任意位置取一高斯面 $S$ .

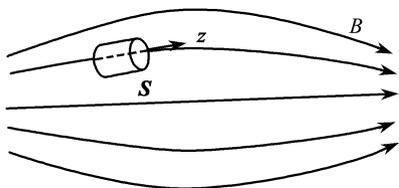


图2 磁场分布

将图2中的高斯面 $S$ 放大如图3所示,磁场沿 $z$ 轴方向的分量为 $B_z$ ,沿半径方向的分量为 $B_r$ ,根据高斯定理

$$B_r \cdot 2\pi r dz + B_{z+dz} \pi r^2 = B_z \pi r^2 \quad (1)$$

即有

$$B_r dz = -\frac{1}{2} r (B_{z+dz} - B_z) = -\frac{1}{2} r dB_z$$

得到

$$B_r = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz} \quad (2)$$

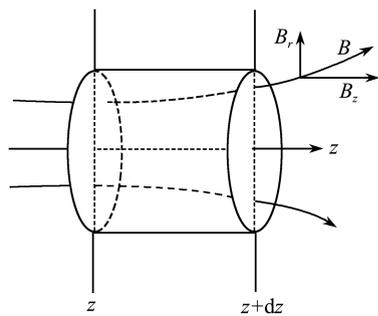


图3 高斯面

### 1.2 带电粒子的运动

假设此时带电粒子在磁场中运动的轨迹为虚线1(图4).

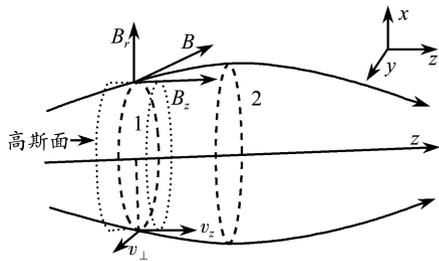


图4 磁镜

在半径方向,有

$$qv_{\perp} B_z = m \frac{v_{\perp}^2}{r}$$

得到

$$r = \frac{mv_{\perp}}{qB_z} \quad (3)$$

$$T = \frac{2\pi m}{qB_z} \quad (4)$$

在  $z$  轴方向,有

$$m \frac{dv_z}{dt} = qv_{\perp} B_r \quad (5)$$

将式(2)、(3)代入式(5)

$$m \frac{dv_z}{dt} = -\frac{mv_{\perp}^2}{2} \frac{1}{B_z} \frac{dB_z}{dz} \quad (6)$$

又

$$\frac{dB_z}{dz} = \frac{dB_z}{dt} \frac{dt}{dz} = \frac{dB_z}{dt} \frac{1}{v_z} \quad (7)$$

式(7)代入式(6)后两边同乘以  $v_z$ ,有

$$mv_z \frac{dv_z}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}mv_z^2\right)}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{mv_{\perp}^2}{B_z} \frac{dB_z}{dt} \quad (8)$$

根据能量守恒

$$d\left(\frac{1}{2}mv_z^2\right) = -d\left(\frac{1}{2}mv_{\perp}^2\right) \quad (9)$$

将式(9)代入式(8),有

$$d\left(\frac{1}{2} \frac{mv_{\perp}^2}{B_z} B_z\right) = -\frac{1}{2} mv_{\perp}^2 \frac{dB_z}{dt} \quad (10)$$

### 1.3 磁矩

根据磁矩的定义

$$\mu = IS = \frac{q}{T} \pi r^2 \quad (11)$$

将式(3)、(4)代入式(11),得到

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{mv_{\perp}^2}{B_z} \quad (12)$$

### 1.4 磁矩守恒

将式(12)代入式(10),有

$$\frac{d(\mu B_z)}{dt} = \mu \frac{dB_z}{dt} \quad (13)$$

则磁矩  $\mu$  为常量. 即在此过程中,磁矩为守恒量.

即有

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{mv_{\perp}^2}{B_z} = \frac{1}{2} \frac{mv_{\perp 0}^2}{B_{z0}} = C \quad (14)$$

### 1.5 关于守恒量的讨论

在上述推导中存在一定的近似. 主要问题在于要保证带电粒子绕磁场运动的曲率半径  $r$  和高斯面的  $r$  保持一致. 这样才可将式(2)代入式(5)求解. 实际上,由于磁场为非均匀场,导致带电粒子的运动并非等距、等半径的螺旋线,而是在高斯面附近的螺旋运动(图5).

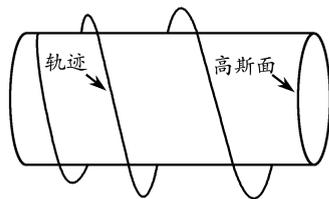


图5 轨迹与高斯面

由于我们讨论的是一个随空间缓慢变化的磁场,即  $\frac{\partial B}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial B}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial B}{\partial z}$  都很小,故粒子的运动轨迹与高斯面的偏离不大,守恒条件近似成立.

## 2 从涡旋电场到守恒量

### 2.1 涡旋电场做功

参照图4,粒子在1位置运动时,从右往左观察,粒子运动方向、磁感应强度方向如图6所示.

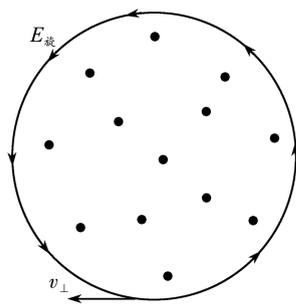


图6 磁场方向与涡旋电场

可以将粒子从1位置运动到2位置的过程等效为粒子的运动平面不变,磁场逐渐减小的过程. 由于磁通量的变化,在空间中产生涡旋电场,其方向如图6中  $E_{旋}$  所示. 此时涡旋电场的方向与电子运动方向相反,绕行一圈的过程中,根据动能定理,有

$$d\left(\frac{1}{2}mv_{\perp}^2\right) = q\varepsilon = q\pi r^2 \frac{dB_z}{dt} \quad (15)$$

此情景中,  $\frac{dB_z}{dt} < 0$ ,故粒子的环绕速度在减小.

### 2.2 近似处理

$$\frac{dB_z}{dt} = \frac{dB_z}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{dB_z}{dz} v_z \quad (16)$$

绕行一周所需的时间  $T$  满足式(4),  $m$  的数量级为  $10^{-31}$ ,  $q$  的数量级为  $10^{-19}$ , 磁约束问题中,  $B_z$  一般也不会太小, 故满足

$$T = \frac{2\pi m}{qB_z} \rightarrow 0$$

则有

$$dz = v_z dt \approx v_z T \quad (17)$$

### 2.3 守恒量的推导

将式(4)、(16)、(17)代入式(15), 得到

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}mv_{\perp}^2\right)}{\frac{1}{2}mv_{\perp}^2} = \frac{dB_z}{B_z} \quad (18)$$

两边同时积分, 有

$$\ln \frac{1}{2}mv_{\perp}^2 \Big|_{v_{\perp 0}}^{v_{\perp}} = \ln B_z \Big|_{z_0}^z \quad (19)$$

则有

$$\frac{\frac{1}{2}mv_{\perp}^2}{B_z} = \frac{\frac{1}{2}mv_{\perp 0}^2}{B_{z_0}} \quad (20)$$

此式即为磁矩守恒。

### 2.4 关于守恒量的讨论

在上述推导中, 我们认为在粒子环绕一周时, 磁场变化产生的平均电动势使其加速或者减速。实际上, 一周内  $r$  是变量, 带电粒子运动形成的闭合路径的面积与磁通量变化对应的面积有微小的偏差, 但只要保证式(16)给出的  $\frac{dB_z}{dz}$  不是特别大, 即磁场随着轴向缓慢变化, 以上各式都能很好地满足。原因在于, 一周内动能变化很小, 则产生的  $r$  的变化更小。

### 2.5 另一个方法

我们也可直接从动量定理进行考查

$$\epsilon = -S \frac{dB_z}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB_z}{dt} = E \cdot 2\pi r$$

则

$$E = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dt} \quad (21)$$

此时从涡旋电场的方向与电子运动方向相反, 有

$$-Eqdt = mdv_{\perp} \quad (22)$$

将式(3)、(21)代入式(22), 得到

$$\frac{dB_z}{B_z} = 2 \frac{dv_{\perp}}{v_{\perp}}$$

两式同时积分, 有

$$\frac{v_{\perp}^2}{B_z} = \frac{v_{\perp 0}^2}{B_{z_0}} \quad (23)$$

式(23)与磁矩守恒等价。此方法要求涡旋电场线和

运动轨迹严格重合。实际上, 由于磁场的非均匀性, 这两者存在微小偏差。

### 3 关于角动量守恒的条件

许多文献利用角动量守恒来导出守恒量。如图7所示, 洛伦兹力的方向指向轴线, 则在  $z$  轴方向角动量守恒, 有

$$L = mv_{\perp} r = C \quad (24)$$

将式(3)代入式(24), 有

$$L = \frac{m^2 v_{\perp}^2}{qB_z} = C \quad (25)$$

对于确定的粒子,  $m$  和  $q$  都是常数, 则角动量守恒与磁矩守恒是等价的。此推导的前提是洛伦兹力始终指向轴线, 圆心总落在轴上。

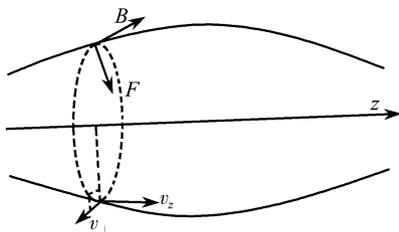


图7 角动量

如图8所示, 由于粒子所做的是螺旋运动, 其受力不总是指向轴线, 其圆心也不总是落在轴上。但如果磁场随空间变化缓慢, 则螺旋线与圆周的偏差不大, 可保证受力与轴线偏差不大, 从而保证角动量近似守恒。

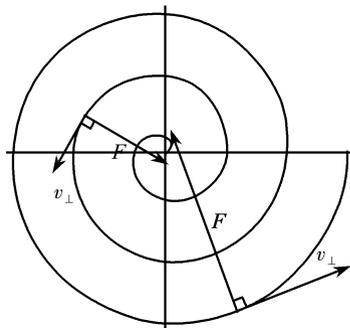


图8 螺旋线运动

### 4 结束语

磁约束问题还有着广泛的运用。如图9所示, 带电粒子(如宇宙射线的带电粒子)被地磁场捕获, 绕地磁感应线做螺旋线运动, 在近两极处地磁场增强, 做螺旋运动的粒子被折回, 结果沿磁力线来回振荡形成范阿仑辐射带。

(下转第41页)

的,学生不仅可以完成学习目标,掌握很久以前科学家们的智慧结晶,还可以在学习过程中通过信息技术的使用,了解一些较为前沿的学科成果,帮助学生开阔眼界<sup>[7]</sup>.总之,TPACK理论为广大教师进行信息技术化教学提供了坚实的理论依据,在此基础上教师可以不断探索学习,提高自身水平,改善教学效果,同时促进教育信息化发展.

### 参考文献

- 1 胡洋洋,戴瑞,于海波,等. TPACK视域下的高中物理新授课教学设计——以“简谐运动”为例[J]. 物理教师, 2020,41(9):7~10
- 2 张睿,李静,季卫新. 基于TPACK整合技术的初中物理研究性备课——以苏科版教材“速度”为例[J]. 中学物

- 理,2020,38(20):2~5
- 3 文安扬. 信息化技术在高中物理教学中的应用探索[J]. 科学咨询(教育科研),2020(12):188
- 4 陈建. 物理教师的TPACK结构及其发展[J]. 教育探索,2016(3):133~137
- 5 刘玲. 如何使用DIS数字化实验系统和APP开发学生实验——以“牛顿管”实验为例[J]. 物理教学,2018,40(9):29~30
- 6 马琳娜,王林. 基于TPACK理论框架下探究中学物理的教与学[J]. 教育教学论坛,2019(24):212~213
- 7 滕国雄. 基于TPACK视角下在高中物理教学中运用翻转课堂探析——以“外力作用下的振动”为例[J]. 广西教育,2017(18):55~56

## Research on the Application of TPACK Theory in High School Physics Teaching

——Taking Free Fall Motion as an Example

Min Wenjing Huang Wendeng

(School of Physics and Telecommunication Engineering, Shaanxi University of Technology, Hanzhong, Shaanxi 723000)

**Abstract:** The integration of information technology and curriculum is the inevitable requirement of the development and progress of education and teaching in the information age. Under this background, TPACK theory (the knowledge of subject teaching method integrating technology) just provides a solid theoretical foundation for the majority of basic educators to carry out information technology-based teaching. Due to the characteristics of high school physics course, the theory for the teaching of physics has a more profound guiding significance, so this article from three aspects discusses the TPACK theory applied in the high school physics teaching, the necessity of research on the theory of TPACK application strategy, as a case study of “free fall” TPACK system analyzed, It is hoped to provide some references for the application of TPACK theory in high school physics teaching.

**Key words:** TPACK theory; information technology; high school physics

(上接第36页)

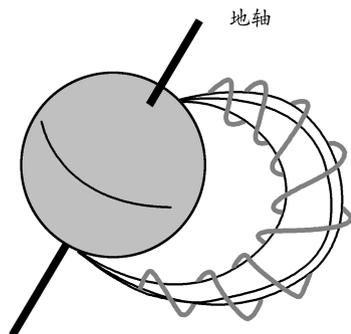


图9 范阿仑辐射带

由于地球体积很大,地磁场随空间的变化非常缓慢,宇宙粒子在运动过程中近似满足“磁矩守恒”或者“角动量”守恒.

若带电粒子无法满足折返条件,粒子在两极处的磁力线引导下,在两极附近进入大气层,与大气中的原子和分子碰撞并激发,产生光芒,形成极光.

### 参考文献

- 1 张琳,蔡莉莉. 磁镜原理及其在磁约束中的应用[J]. 物理与工程,2013(3)
- 2 吴庆华. 应用磁矩守恒解答磁约束问题[J]. 物理教学, 2015(7):16~18