对第 33 届全国中学生物理竞赛复赛第 6 题的解答的质疑

李　惠　　范雪娇

（株洲市第二中学　湖南 株洲　412007）

（收稿日期：2020-12-11）

摘　要：对第 33 届全国中学生物理竞赛复赛第 6 题进行了详细地解答，所得结果与参考解答有出入，通过验证，参考解答有误.

关键词：第 33 届　物理竞赛　复赛　第 6 题

【原题】（节选）光电倍增管是用来将光信号转化为电信号并加以放大的装置，其结构如图 1 所示. 它主要由一个光阴极、n 个倍增极和一个阳极构成；光阴极与第 1 倍增极、各相邻倍增极及第 n 倍增极与阳极之间均有电势差 V；从光阴极逸出的电子称为光电子，其中大部分（百分比 η）被收集到第 1 倍增极上，余下的被直接收集到阳极上；每个被收集到第 i 倍增极（$i=1,\cdots,n$）的电子在该电极上又使得 δ 个电子（$\delta>1$）逸出；第 i 倍增极上逸出的电子有大部分（百分比 σ）被第 $i+1$ 倍增极收集，其他被阳极收集；直至所有电子被阳极收集，实现信号放大. 已知电子电荷量绝对值为 e. 求：光电倍增管放大一个光电子的平均耗能，已知 $\delta\sigma>1$，$n>1$.

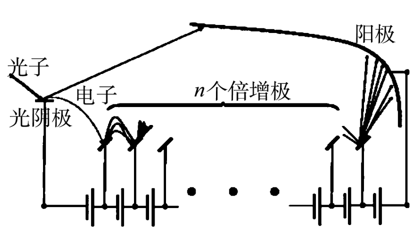

图 1　光电倍增管结构图

原题一共有 2 小问，笔者只节选了参考解答有误的第 1 小问，附上其解答结果.

光电倍增管放大一个光电子的平均耗能为

$$\frac{E}{n_{\mathrm{p}}}=\left\{(1-\eta)n+\frac{\eta(1-\sigma)\delta\{\sigma\delta[(\sigma\delta)^{n}-1]+n(1-\sigma\delta)\}}{(\sigma\delta-1)^{2}}+\frac{\eta[(\sigma\delta)^{n}-\sigma\delta]}{\sigma\delta-1}+1\right\}eV$$

式中 n_{p} 是从光阴极逸出的电子个数，E 是消耗的总电能.

1　对结果的质疑及验证

设 $n=0$，物理意义是光电倍增管中从光阴极逸出的光电子全部被直接收集到阳极上，此时光阴极与阳极间电势差 $V_{\mathrm{pa}}=(n+1)V=V$，则从光阴极逸出的 n_{p} 个光电子被电压 V_{pa} 加速，光电倍增管放大一个光电子的平均能耗就是 eV. 换句话说，当 $n=0$ 时，$\frac{E}{n_{\mathrm{p}}}=eV$.

我们把 $n=0$ 代入原解答得

$$\frac{E}{n_{\mathrm{p}}}=(1-\eta)eV \tag{1}$$

显然不正确.

进一步验证 $n=1$ 的情形. 当 $n=1$ 时，其物理意义是光电倍增管中有 n_{p} 个光电子从光阴极逸出，有 ηn_{p} 个光电子被收集到第 1 倍增极上，$(1-\eta)n_{\mathrm{p}}$ 个光电子被直接收集到阳极上，最后有 $\delta\eta n_{\mathrm{p}}$ 个光电子从第 1 倍增极上逸出，被收集到阳极上. 我们分成两步来计算光电倍增管放大以上这些光电子所消耗的电能. 第一步，先计算从光阴极直接被阳极收集的光电子所消耗的电能. 从光阴极到阳极的电势差为

$$V_{\mathrm{pa}}=(n+1)V=2V \tag{2}$$

一共有 $(1-\eta)n_{\mathrm{p}}$ 个光电子从光阴极到阳极，一共消耗的电能为 E_1，有

$$E_1=2(1-\eta)n_{\mathrm{p}}eV \tag{3}$$

第二步，计算从光阴极逸出被第 1 倍增极收集再从第 1 倍增极被阳极收集的光电子消耗的电能 E_2，显然

$$E_2=(\eta+\eta\delta)n_{\mathrm{p}}eV \tag{4}$$

最后，把两部分消耗的电能加起来，求得

$$E=E_1+E_2 \tag{5}$$

$$\frac{E}{n_{\mathrm{p}}}=[2(1-\eta)+\eta+\eta\delta]eV \tag{6}$$

那么，把 $n=1$ 代入原参考解答，会是这个结果吗？

$$\frac{E}{n_{\mathrm{p}}}=[(1-\eta)+\eta(1-\sigma)\delta]eV \tag{7}$$

显然，代入之后的结果式(7)与真实物理意义对应下的结果式(6)不符.

结论：原解答有误.

2　笔者所做的详细解答及验证

为了能让读者清晰地看到加速各部分光电子所消耗的电能，笔者先进行简单的罗列如下：

放大从光阴极到第 1 倍增极，和光阴极到阳极的光电子消耗的电能为 E_0，有

$$E_0=[\eta+(1-\eta)(n+1)]n_{\mathrm{p}}eV \tag{8}$$

放大从第 1 倍增极到第 2 倍增极，和第 1 倍增极到阳极的光电子消耗的电能为 E_1，有

$$E_1=[\eta\delta\sigma+\eta\delta(1-\sigma)n]n_{\mathrm{p}}eV \tag{9}$$

放大从第 2 倍增极到第 3 倍增极，和第 2 倍增极到阳极的光电子消耗的电能为 E_2，有

$$E_2=[\eta\delta^2\sigma^2+\eta\delta^2\sigma(1-\sigma)(n-1)]n_{\mathrm{p}}eV \tag{10}$$

放大从第 3 倍增极到第 4 倍增极，和第 3 倍增极到阳极的光电子消耗的电能为 E_3，有

$$E_3=[\eta\delta^3\sigma^3+\eta\delta^3\sigma^2(1-\sigma)(n-2)]n_{\mathrm{p}}eV \tag{11}$$

放大从第 $(n-1)$ 倍增极到第 n 倍增极，和第 $(n-1)$ 倍增极到阳极的光电子消耗的电能为 E_{n-1}，有

$$E_{n-1}=[\eta\delta^{n-1}\sigma^{n-1}+2\eta\delta^{n-1}\sigma^{n-2}(1-\sigma)]n_{\mathrm{p}}eV \tag{12}$$

放大从第 n 倍增极到阳极的光电子消耗的电能为 E_n，有

$$E_n=(\eta\delta^n\sigma^{n-1})n_{\mathrm{p}}eV \tag{13}$$

接下来，把式(8)～(13)相加得

$$E=E_0+E_1+E_2+\cdots+E_{n-1}+E_n \tag{14}$$

在式(14)等号右边含有两个等比数列，其一是 $\eta n_{\mathrm{p}}eV,\eta\delta\sigma n_{\mathrm{p}}eV,\eta\delta^2\sigma^2n_{\mathrm{p}}eV,\cdots,\eta\delta^{n-1}\sigma^{n-1}n_{\mathrm{p}}eV$，我们用级数 S_1 来表示上述等比数列的和；其二是 $\eta\delta\cdot(1-\sigma)nn_{\mathrm{p}}eV,\eta\delta^2\sigma(1-\sigma)(n-1)n_{\mathrm{p}}eV,\eta\delta^3\sigma^2(1-\sigma)\cdot(n-2)n_{\mathrm{p}}eV,\cdots,2\eta\delta^{n-1}\sigma^{n-2}(1-\sigma)n_{\mathrm{p}}eV$，我们用级数 S_2 来表示上述等比数列的和；还剩下两项 $(1-\eta)\cdot(n+1)n_{\mathrm{p}}eV+\eta\delta^n\sigma^{n-1}n_{\mathrm{p}}eV$ 作为第 3 部分. 现在我们来求以上 3 部分的和.

显然

$$S_1=\frac{1-(\delta\sigma)^n}{1-\delta\sigma}\eta n_{\mathrm{p}}eV \tag{15}$$

$$S_2=\eta\delta(1-\sigma)n_{\mathrm{p}}eV[n+\delta\sigma(n-1)+\delta 2\sigma 2n-2+\cdots+\delta n-2\sigma n-2\cdot 2)] \tag{16}$$

构建级数 $S_3=\delta\sigma S_2$ 来错位求和

$$S_3=\eta\delta(1-\sigma)n_{\mathrm{p}}eV[\delta\sigma n++\delta^2\sigma^2(n-1)+\cdots+\delta n-2\sigma n-2\cdot 3+\delta n-1\sigma n-1\cdot 2)] \tag{17}$$

式(16)、(17)相减得

$$S_2=\frac{\eta\delta(1-\sigma)\left[\frac{\delta\sigma(1-\delta^{n-2}\sigma^{n-2}}{1-\delta\sigma}+2\delta^{n-1}\sigma^{n-1}-n\right]}{\delta\sigma-1}n_{\mathrm{p}}eV \tag{18}$$

把以上 3 部分相加得

$$\begin{aligned}E&=E_1+E_1+E_2+\cdots+E_{n-1}+E_n=\\&S_1+S_2+(1-\eta)(n+1)n_{\mathrm{p}}eV+\eta\delta^n\sigma^{n-1}n_{\mathrm{p}}eV=\\&\left\{\eta\frac{1-(\delta\sigma)^n}{1-\delta\sigma}+\frac{\eta\delta(1-\sigma)\left[\frac{\delta\sigma(1-\delta^{n-2}\sigma^{n-2})}{1-\delta\sigma}+2\delta^{n-1}\sigma^{n-1}-n\right]}{\delta\sigma-1}+\right.\\&\left.(1-\eta)(n+1)+\eta\delta^n\sigma^{n-1}\right\}n_{\mathrm{p}}eV\end{aligned} \tag{19}$$

于是光电倍增管放大一个光电子的平均能耗为

$$\begin{aligned}\frac{E}{n_{\mathrm{p}}}=&\left\{\eta\frac{1-(\delta\sigma)^n}{1-\delta\sigma}+\frac{\eta\delta(1-\sigma)\left[\frac{\delta\sigma(1-\delta^{n-2}\sigma^{n-2})}{1-\delta\sigma}+2\delta^{n-1}\sigma^{n-1}-n\right]}{\delta\sigma-1}+\right.\\&\left.(1-\eta)(n+1)+\eta\delta^n\sigma^{n-1}\right\}eV\end{aligned} \tag{20}$$

我们将 $n=1$ 代入式(20)中，进行验证

$$\begin{aligned}\frac{E}{n_{\mathrm{p}}}=&\left\{\eta\frac{1-(\delta\sigma)^1}{1-\delta\sigma}+\frac{\eta\delta(1-\sigma)\left[\frac{\delta\sigma(1-\delta^{-1}\sigma^{-1})}{1-\delta\sigma}+2\delta^0\sigma^0-1\right]}{\delta\sigma-1}+\right.\\&\left.(1-\eta)(1+1)+\eta\delta^1\sigma^0\right\}eV=\\&\left\{\eta+\frac{\eta\delta(1-\sigma)[-1+2-1]}{1-\delta\sigma}+2(1-\eta)+\eta\delta\right\}eV=\\&[\eta+2(1-\eta)+\eta\delta]eV\end{aligned} \tag{21}$$

与式(6)比较，完全吻合.

我们再把文首的 $n=0$ 的情况代入式(20)中得

$$\begin{aligned}\frac{E}{n_{\mathrm{p}}}=&\left\{\eta\frac{1-(\delta\sigma)^0}{1-\delta\sigma}+\frac{\eta\delta(1-\sigma)\left[\frac{\delta\sigma(1-\delta^{-2}\sigma^{-2})}{1-\delta\sigma}+2\delta^{-1}\sigma^{-1}\right]}{\delta\sigma-1}+\right.\\&\left.(1-\eta)+\eta\sigma^{-1}\right\}eV=\\&\left[0+\frac{\eta}{\sigma}(\sigma-1)+(1-\eta)+\eta\sigma^{-1}\right]eV=eV\end{aligned}$$

结果与实际的物理意义完全吻合.

综上所述，式(20)才是本题的正确解答，原解答确实有误.