



“球槽模型”中的临界质量比与静止释放初始位置的关系

白荣华 李春梅 高远

(重庆市实验学校 重庆 401320)

(收稿日期:2020-12-07)

摘要:球槽模型中,仅当槽、球质量比大于或等于相应的临界质量比时,小球才会在最低点获得最大速率.临界质量比与静止释放的初位置有关.通过数理解析和数学软件绘图分析,得到了槽、球临界质量比与静止释放初始角度之间的定量关系,是对已有文献结论的补充和推广.

关键词:球槽模型 临界质量比 初始角度

1 问题提出

如图1所示的“球槽模型”中,质量为 M 的光滑半圆形槽置于光滑水平面上,质量为 m 的小球从与圆心等高的右端静止释放,通常认为“当小球运动到圆弧最低点时,小球的速率取得最大值”.而文献[1]推出小球速率随位置变化的函数表达式后,通过严谨的数理分析,可以发现“只有当槽、球质量比不小于 $(1+\sqrt{3})$ 时,小球在圆弧最低点的速率才是最大值”.

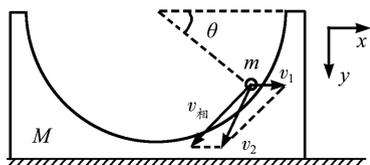


图1 球槽模型

设小球静止释放的初始位置和圆心的连线与水平方向夹角为 θ_0 ,不妨把上述的 $(1+\sqrt{3})$ 称作 $\theta_0=0$ 时“球槽模型”中的临界质量比,其物理意义为:仅当槽球质量比大于或等于临界质量比时,小球才会在最低点获得最大速率.那么,自然会进一步问:当 θ_0 为不等于零的任意锐角时,要保证小球在最低点速率最大,槽、球的临界质量比还是 $(1+\sqrt{3})$ 吗?如果不是 $(1+\sqrt{3})$,又如何计算它的大小呢?本文将通过数理解析得出临界质量比与初始角度之间的定量关系.

2 数理解析

各量如图2所示,小球滑下后某一瞬时小球与圆心的连线同水平方向的夹角为 θ ,对球槽系统分别由水平方向动量守恒和机械能守恒定律得

$$m v_{2x} = M v_1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} M v_1^2 = m g R (\sin \theta - \sin \theta_0) \quad (2)$$

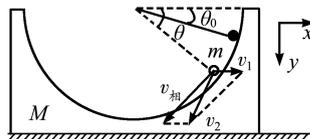


图2 球槽模型各量分析

小球相对槽的速度方向沿圆弧切向,有

$$v_{2y} \tan \theta = v_{2x} + v_1 \quad (3)$$

$$v_2^2 = v_{2x}^2 + v_{2y}^2 \quad (4)$$

令槽、球质量比 $k = \frac{M}{m}$,则可得

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gR(\sin \theta - \sin \theta_0)}{A}} \quad (5)$$

$$v_2 =$$

$$\sqrt{2gR(\sin \theta - \sin \theta_0) - \frac{2kgR(\sin \theta - \sin \theta_0)}{A}} \quad (6)$$

其中

$$A = k + k^2 + (1+k)^2 \cot^2 \theta$$

为了考查式(6)中球的速率 v_2 的单调性,我们等价考虑下面函数 $f(\theta)$ 的单调性,有

$$f(\theta) = \frac{v_2^2}{2gR} =$$

$$(\sin \theta - \sin \theta_0) - \frac{k(\sin \theta - \sin \theta_0)}{A} \quad (7)$$

$$f'(\theta) = \cos \theta -$$

$$\frac{kA \cos \theta - k(\sin \theta - \sin \theta_0)2(1+k)^2 \cot \theta (-\csc^2 \theta)}{A^2} =$$

$$\cos \theta - \frac{kA \cos \theta + k(\sin \theta - \sin \theta_0) \frac{2(1+k)^2 \cos \theta}{\sin^3 \theta}}{A^2} =$$

$$\cos \theta \left[1 - \frac{kA + k(\sin \theta - \sin \theta_0) \frac{2(1+k)^2}{\sin^3 \theta}}{A^2} \right] \quad (8)$$

在 $\theta \in \left[\theta_0, \frac{\pi}{2} \right]$ 内 $f(\theta)$ 是广义增函数(即不减函数)

的充要条件是 $f'(\theta) \geq 0$, 因 $\theta \in \left[\theta_0, \frac{\pi}{2} \right]$ 内 $\cos \theta \geq 0$,

故只需要上式中的

$$1 - \frac{kA + k(\sin \theta - \sin \theta_0) \frac{2(1+k)^2}{\sin^3 \theta}}{A^2} \geq 0$$

即

$$A^2 \geq kA + \frac{2k(1+k)^2(\sin \theta - \sin \theta_0)}{\sin^3 \theta} \quad (9)$$

移项后提取公因式有

$$\begin{aligned} [k^2 + (1+k)^2 \cot^2 \theta]A &\geq \\ \frac{2k(1+k)^2(\sin \theta - \sin \theta_0)}{\sin^3 \theta} &\quad (10) \end{aligned}$$

两边同乘 $\sin^2 \theta$, 得

$$\begin{aligned} [k^2 + (1+2k)\cos^2 \theta]A &\geq \\ \frac{2k(1+k)^2(\sin \theta - \sin \theta_0)}{\sin \theta} &\quad (11) \end{aligned}$$

式(11)左端是 θ 的减函数, 右端是 θ 的增函数,

要它在 $\theta \in \left[\theta_0, \frac{\pi}{2} \right]$ 上皆成立, 只需在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时成立

便可, 这样式(11)化为

$$k^2(k+k^2) \geq 2k(1+k)^2(1-\sin \theta_0)$$

移项化简得

$$k^2 \geq 2(1+k)(1-\sin \theta_0) \quad (12)$$

解此关于 k 的一元二次不等式, 得

$$k \geq (1-\sin \theta_0) + \sqrt{(1-\sin \theta_0)(3-\sin \theta_0)} \quad (13)$$

从而得到临界质量比

$$k_c(\theta_0) =$$

$$(1-\sin \theta_0) + \sqrt{(1-\sin \theta_0)(3-\sin \theta_0)} \quad (14)$$

3 讨论与结论

由式(14)可知: 当 $\theta_0 = 0$ 时, 有 $k_c = 1 + \sqrt{3} \approx 2.73$, 这正是文献[1]中的结果;

当 $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$ 时, 有 $k_c = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$;

当 $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$, $k_c \approx 1.11$;

当 $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$, $k_c \approx 0.67$.

由式(14)还容易知道, θ_0 增大 $\rightarrow \sin \theta_0$ 增大 $\rightarrow k_c$ 减小, 所以 $k_c = k_c(\theta_0)$ 随初始角 θ_0 的增加而单调递减, 也即释放初始位置越低, 小球能在最低点取得最大速度的质量比临界值 k_c 越小, 可用数学软件作出如图3所示的 $k_c(\theta_0)$ 图像直观地认识这一点. 其物理意义是很明显的: 在初始角度较小的情况下, 即使 $\frac{M}{m}$ 较小, 槽 M 的反冲也会很弱. 从而槽带走的能量很少, 小球越容易在最低点获得最大速度.

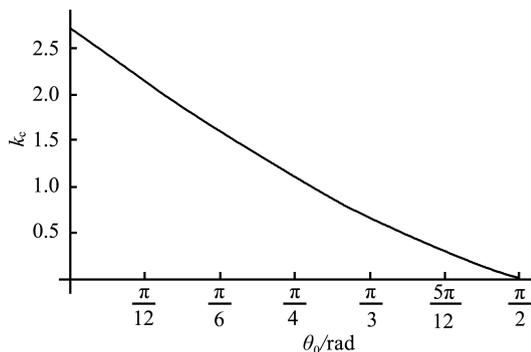


图3 临界质量比 k_c 与释放初始角度 θ_0 的关系

另外我们可以从式(7)出发, 用数学软件 Mathematica 绘制 $f(\theta)$ 图像, 从图像可以间接看出小球速度 v_2 随位置变化的情况, 改变释放的初始角度 θ_0 , 分别做出质量比 k 分别为 0.1, 0.2, k_c , 5, 10 情况下的 $f(\theta)$ 图像. 根据运动过程的对称性, 特意绘制 $\theta \in [\theta_0, \pi - \theta_0]$ 上的整个图像, 在 $\theta \in \left[\theta_0, \frac{\pi}{2} \right]$ 和 $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi - \theta_0 \right]$ 上的图像显然关于 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 轴对称. 可以看出, k 大于临界比 $k_c(\theta_0)$ 时, 小球速度 v_2 才能在 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 即最低点的位置取得最大值. 从系列图像中可看出, 不同的初始释放位置, 对应的临界值不同. 用 Mathematica 绘制的 $f(\theta)$ 图像如图4所示.

(下转第76页)

一个非常简洁而美妙的结果. 实际上这个结果的确具有合理性, 对两金属棒来说水平方向受到不为零的合力时, 系统必然具有加速度而且最终达到稳定状态时(比如匀加速)电流 I 必须恒定或者说电流的变化率为零. 因为

$$I = \frac{B_1 l_1 v_1 - B_2 l_2 v_2}{R_1 + R_2}$$

所以

$$0 = \frac{dI}{dt} = \frac{B_1 l_1 a_1 - B_2 l_2 a_2}{R_1 + R_2}$$

或者

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{B_2 l_2}{B_1 l_1}$$

特别地, 若 $B_1 = B_2$, 则

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{l_2}{l_1}$$

若 $l_1 = l_2$, 则

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{B_2}{B_1}$$

中学物理资料上常常是其中的一根导体棒受恒定的外力且

$$l_1 = l_2 \quad B_1 = B_2$$

这就得到我们所熟悉的结论

$$\frac{a_1}{a_2} = 1$$

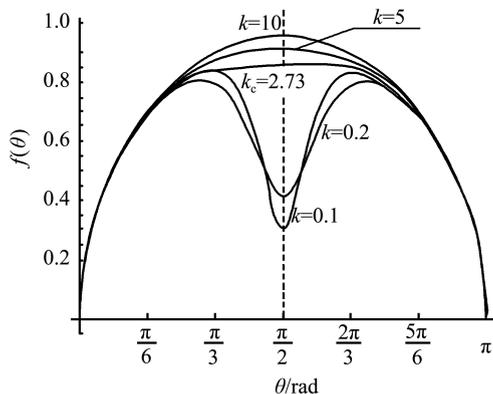
如果两杆都不受到外力, 最终稳定后两杆的加速度均为零, 这就是原题的情景. 当然如果其中一根杆受到恒定的外力, 最终稳定后两杆的加速度之比就是一个简洁的结果

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{B_2 l_2}{B_1 l_1}$$

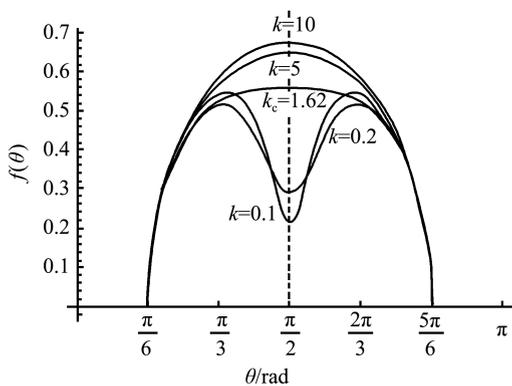
参考文献

- 1 郑行军. 电磁感应现象中的双杆模型归类与剖析[J]. 物理教学探讨, 2016(1): 75~77
- 2 金文力, 胡嘉玥, 杨一博. 双杆架导轨问题的再讨论[J]. 中学物理, 2012(9): 43~44

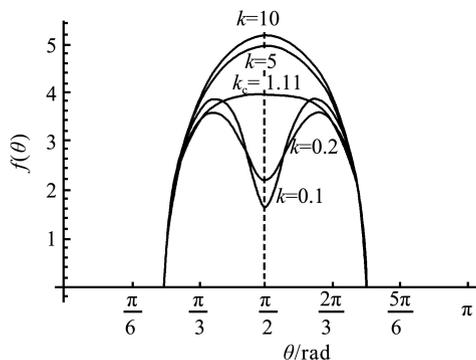
(上接第73页)



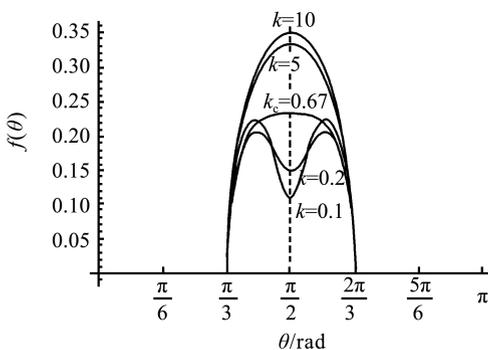
(a) 释放初始角度 $\theta_0 = 0$



(b) 释放初始角度 $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$



(c) 释放初始角度 $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$



(d) 释放初始角度 $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$

图4 不同释放初始角下, $f(\theta)$ 随角度变化关系

参考文献

- 1 陈向正, 李力, 张贵华. “球槽问题”模型的数理分析和一

个错误的澄清[J]. 物理教师, 2018(5): 57~58