复合场中的滚轮线

王朝祥 宋 婕
（北京市第八十中学 北京 100102）

（收稿日期：2020－12－12）

摘 要：带电质点在正交的匀强电场（重力场）和匀强磁场中运动，轨迹为滚轮线．处理滚轮线问题的关键是构造匀速直线运动以平衡电场力（重力），从而将带电质点的运动分解为匀速直线运动和匀速圆周运动，简化问题的处理过程．

关键词：滚轮线 运动分解 补偿思想

滚轮线，是轮子滚出来的曲线，是数学里众多摆线中的一种．半径为 R 的轮子在水平面上沿一直线纯滚动，轮子边缘上任一点 P 的运动轨迹便是一条滚轮线[1]．

1 滚轮线的数学特征

滚轮线的形状与轮子滚动的快慢无关．为了简化问题，我们研究最简单的滚动 —— 匀速纯滚动：轮心 C 做匀速直线运动，速度大小记为 v_0；轮子边缘的质点 P 绕轮心做匀速圆周运动，角速度 $\omega=\dfrac{v_0}{R}$．不难发现，质点 P 的运动是匀速直线运动和匀速圆周运动的叠加．

建立坐标轴如图 1 所示，$t=0$ 时质点 P 在坐标原点，以轮子的转角 θ 为参数，摆线方程为

$$\begin{cases} x=R(\theta-\sin\theta) \\ y=R(1-\cos\theta) \end{cases}$$

不难发现，滚轮线的跨度为 $2\pi R$，质点 P 的最大高度为 $2R$．

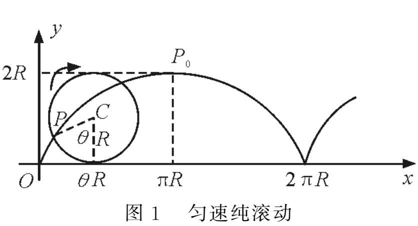

图 1 匀速纯滚动

根据运动的叠加原理，在匀速纯滚动中，质点 P 在最高点 P_0 的速度 v 沿水平方向，值为 $2v_0$；P_0 点的加速度等于匀速圆周运动的向心加速度 a_n，值为 $\dfrac{v_0^2}{R}$．根据 $a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$ 得，滚轮线最高点的曲率半径

$$\rho=4R$$

2 复合场中的滚轮线

在磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$ 的水平匀强磁场中，一质量为 m，带正电 q 的小球在 O 点由静止释放，小球在重力和洛伦兹力作用下运动，其运动也是一条滚轮线（下滚轮线），如图 2 所示．

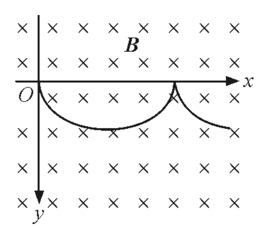

图 2 复合场中的滚轮线

为了解释滚轮线的成因，我们做如下分析：

带电小球因重力而下落，有了速度便会受洛伦兹力作用，形成曲线运动．如图 3 所示，将小球在运动过程中任意时刻的速度 v 进行分解．

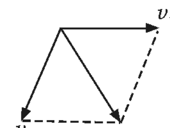

图 3 复合场中带电小球速度分析

分速度 v_1 对应的洛伦兹力 f_1 与重力平衡，即 $Bqv_1=mg$，因此 v_1 的方向水平向右，大小 $v_1=\dfrac{mg}{Bq}$，类比速度选择器的工作原理可知，v_1 对应的分运动为匀速直线运动．

分速度 v_2 对应的洛伦兹力 f_2 与 v_2 垂直，提供向心力，因此 v_2 对应的分运动为匀速圆周运动，运

动过程中 v_2 的大小保持不变. 带电小球在 O 点的初速度为零,说明 v_2 的初始量 v_{20} 与 v_1 大小相等、方向相反,因此有 $v_2 = v_{20} = v_1 = \dfrac{mg}{Bq}$,匀速圆周运动的半径

$$R = \frac{mv_2}{Bq} = \frac{m^2 g}{B^2 q^2}$$

综上可见,带电小球的运动可以分解为水平向右的匀速直线运动和半径为 R 的匀速圆周运动,其运动轨迹为滚轮线也就不难理解.

若以一恒力 F(匀强电场中的电场力 Eq,或者电场力 Eq 与重力 mg 的合力) 代替重力场,带电小球的轨迹也是滚轮线[2].

下面通过两个典型问题体验一下与滚轮线相关的定量运算.

【例 1】水平放置的两个平行金属板 MN 和 PQ 间存在匀强电场(场强大小为 E) 和匀强磁场(磁感应强度大小为 B),磁场方向垂直纸面向里. 质量为 m,电荷量为 q 的带电微粒(重力可忽略) 只在电场力和洛伦兹力作用下,从 I 点由静止开始运动,运动轨迹如图 4 所示. 已知微粒到达 K 点时速度为零,J 是曲线上离 MN 板最远的点之一,曲线在 J 点的曲率半径为该点到 I 点竖直方向距离的 2 倍. 以 I 点为原点建立坐标系,求:

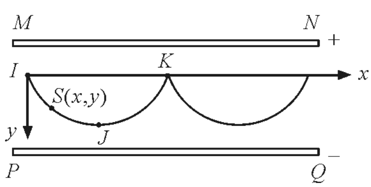

图 4　例 1 题图

(1) 微粒运动到任意位置 $S(x,y)$ 处的速率 v;

(2)J 点的纵坐标 y_m.

分析与解答:

(1) 微粒从 I 点运动到 S 点,洛伦兹力不做功,根据动能定理

$$Eqy = \frac{1}{2}mv^2 \qquad v = \sqrt{\frac{2Eqy}{m}}$$

(2) 微粒运动到 J 点,洛伦兹力与电场力的合力提供向心力,即

$$Bqv_m - Eq = \frac{mv_m^2}{2y_m}$$

由(1) 得 $v_m = \sqrt{\dfrac{2Eqy_m}{m}}$,综上可得

$$y_m = \frac{2Em}{B^2 q}$$

点拨与发散:

本题难度是高考难度的问题,题目涉及滚轮线,但未明示滚轮线的叫法,也给出了"曲线在 J 点的曲率半径为该点到 I 点竖直方向距离的 2 倍" 这一重要关系,避免增加题目难度.

根据前文所述,本题中带电微粒在电场力和洛伦兹力作用下运动,轨迹为滚轮线.

带电微粒的运动可以分解为水平向右速度大小 $v_1 = \dfrac{E}{B}$ 的匀速直线运动和轨道半径 $R = \dfrac{mv_1}{Bq} = \dfrac{Em}{B^2 q}$ 的匀速圆周运动,显然 $y_m = 2R = \dfrac{2Em}{B^2 q}$.

【例 2】在真空中建立坐标系 xOy,以水平向右为 x 轴正方向,竖直向下为 y 轴正方向. 在 $0 \leqslant y \leqslant L$ 的区域内存在匀强磁场,$L = 0.80$ m,磁感强度的方向垂直于纸面向里,$B = 0.10$ T,如图 5 所示. 把比荷 $\dfrac{q}{m} = 50$ C/kg 的带正电质点在 $x = 0$,$y = -0.20$ m 处由静止释放,将带电质点过原点的时刻定为 $t = 0$ 时刻,求任一时刻 t 带电质点在磁场中的位置坐标,$g = 10$ m/s^2.

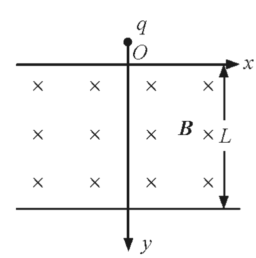

图 5　例 2 题图

分析与解答:

质点沿 y 轴正方向进入磁场,进入磁场时的初速度

$$v_0 = \sqrt{2g(-y)} = 2 \text{ m/s}$$

带电质点在磁场中的运动分解为水平向右的匀速直线运动(速度大小为 v_1) 和一个逆时针方向的匀速圆周运动(速度大小为 v_2).

研究圆心水平向右的速度 v_1

$$Bqv_1 = mg \qquad v_1 = \frac{mg}{Bq} = 2 \text{ m/s}$$

如图 6 所示,将 v_0 看作 v_1 与 v_2 的合速度,则

$$v_2 = \sqrt{2}\, v_0 = 2\sqrt{2} \text{ m/s}$$

刚进入磁场时 v_2 与 x 轴负方向的夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$，由 $Bqv_2=\dfrac{mv_2^2}{R}$ 得，匀速圆周运动的半径

$$R=\frac{mv_2}{Bq}=\frac{2\sqrt{2}}{5}\ \mathrm{m}$$

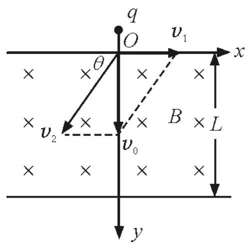

图6　速度 v_0 分解

匀速圆周运动的周期

$$T=\frac{2\pi R}{v_2}=\frac{2\pi}{Bq}=\frac{2\pi}{5}\ \mathrm{s}$$

角速度　　$$\omega=\frac{2\pi}{T}=5\ \mathrm{rad/s}$$

如图7所示，以匀速圆周运动的圆心 C 为坐标原点，建立匀速向右运动（速度大小为 v_1）的直角坐标系 $x'Cy'$.

结合图6和图7可知，在 xOy 系中任意时刻 t 圆心 C 的坐标为

$$x_C=R\sin\theta+v_1t\qquad y_C=R\cos\theta$$

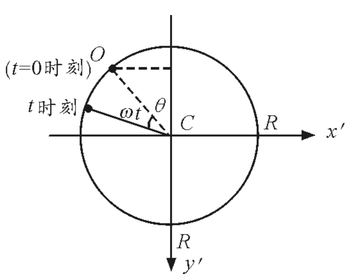

图7　以 C 为原点建立直角坐标系

在 $x'Cy'$ 系中研究带电质点的匀速圆周运动. $t=0$ 时带电质点进入磁场，所在半径与 y' 轴负方向的夹角为 θ. t 时刻带电质点所在半径与 y' 轴负方向的夹角为 $\omega t+\theta$，坐标为

$$x'=-R\sin(\omega t+\theta)\qquad y'=-R\cos(\omega t+\theta)$$

在 xOy 坐标系中，带电质点坐标

$$x=x_C+x'\qquad y=y_C+y'$$

代入数据，整理得

$$x=\left[2t+0.4-\frac{2\sqrt{2}}{5}\sin\left(\frac{\pi}{4}+5t\right)\right]\ \mathrm{m}$$

$$y=\left[0.4-\frac{2\sqrt{2}}{5}\cos\left(\frac{\pi}{4}+5t\right)\right]\ \mathrm{m}$$

点拨与发散：

本题节选自第17届全国中学生物理竞赛复赛题第五题，带电质点在重力场和匀强磁场中运动，轨迹为滚轮线. 要求学生能将质点的运动分解为圆心 C 的匀速直线运动和绕 C 点的匀速圆周运动，然后结合辅助圆进一步定量运算. 滚轮线问题在近些年的自主招生（强基计划）测试中出现频率较高.

3　结束语

处理滚轮线问题的关键是构造匀速直线运动以平衡电场力（重力），从而将带电质点的运动分解为匀速直线运动和匀速圆周运动，简化了问题的处理过程. 这种处理问题的方法可以称为配速法，渗透了补偿思想和化归思想，教师可以引导学有余力的学生仔细体会.

参 考 文 献

1　舒幼生. 趣味滚轮线[J]. 科学，2000(5)：58～60

2　丁庆红，王美芹，静玮. 配速法在复合场运动问题中的应用[J]. 高中数理化，2019(9)：58～61

Roller Line in Compound Field

Wang Chaoxiang　Song Jie

(BeijingNo.80 High School, Beijing　100102)

Abstract: The path of a charged particle moving in an orthogonal uniform electric field (gravitational field) and uniform magnetic field is a roller line. The key idea to deal with the roller line problem is to construct a uniform linear motion to balance the electric field force (gravity), so that the motion of the charged particle can be decomposed into uniform linear motion and uniform circular motion, then the processing process of the problem has been significantly simplified.

Key words: roller line; decomposition of movement; compensation thought