教学拓展
疑难问题解析

构建模型变换研究 N 阶环形网络的等效电阻

黄依欣　　谭志中

（南通大学物理系　江苏 南通　226019）

（收稿日期：2020－12－15）

摘　要：研究了一类 N 阶环形电阻网络的等效电阻，主要采用压缩变换及建立等效模型的方法开展研究．首先采用结构变换将环形网络压缩为平面 n 阶矩型网络，然后建立平面矩形网络的等效模型，巧妙地得到了差分方程的一般解，分别考虑 N 为奇数和 N 为偶数的情形，给出了 N 阶环形网络的 2 个简洁的等效电阻公式．该研究工作对促进基础物理开展科学探究与创新思维能力培养具有重要的参考价值，为物理教师提供了科学探究的实践案例．

关键词：环形网络　压缩变换　等效电阻　差分方程　创新思维

社会的发展和科学的进步推动了电路网络的研究与发展[1]．电阻网络模型的研究能够促进学生思维创新能力的发展，因为电路结构是一种拓扑结构，可以任意改变电路的结构形状，从而能够激发学生的发散思维，尤其是简单的电路网络可以通过实验验证与仿真．在不少中学物理竞赛题中也会出现一些电阻网络的问题．最近 10 年，电阻网络研究获得了比较丰富的研究成果[1～17]，例如，2001－2003 年关于 N 阶梯形网络研究取得了新的突破[2～5]，2011 年文献[1]建立了研究电路网络模型的创新理论，使得许多复杂的电阻网络问题得到解决[6～13]．最近，文献[14～17]利用文献[1]建立的新方法解决了 4 类复杂的 N 阶电阻网络难题，为相关的科学研究建立了新的理论基础．

电阻网络的等效电阻研究虽然获得了比较丰富的研究成果，但综观以上文献的研究发现关于 N 阶环形电阻网络的等效电阻问题尚缺乏深入研究，尽管多边形电阻网络模型也是一类周期的网络模型[8～9]，但是多边形电阻网络模型含有一个特殊的汇聚点，因此 N 阶环形电阻网络的等效电阻问题是一类有待研究的问题．如文献[2～7，10～17]关于电路网络的研究都不是周期网络．

为了研究图 1 所示的环形电阻网络的等效电阻，本文创造了一种新的方法，该方法不同于文献[1～17]中的任何一种方法．本文采用模型压缩的策略获得了新的灵感，创造了新的研究技术，巧妙地将 N 阶环形电阻网络压缩成为 n 阶平面矩形电阻网络．这种模型变换与转化的思想对相关学科的科学研究具有方法论意义，对培养学生的创新思维能力具有积极意义．

1　网络模型的结构变换

考虑图 1 所示的环形网络，其电阻参数电路如图 2 所示．环形网络属于三维空间网络，本文拟采用巧妙的方法研究 A_1 与 B_1 两点间的等效电阻．研究发现环形网络可以等效地压缩成为矩形电阻网络．这是一个重要的发现，是一次思想与方法上的创新．

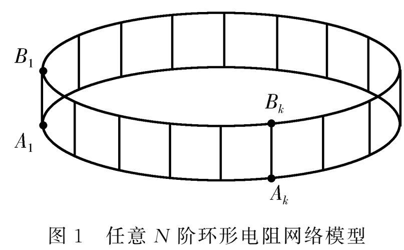

图 1　任意 N 阶环形电阻网络模型

作者简介：黄依欣（1997－　），女，在读硕士研究生，主要从事物理教学论教学与研究工作．

通讯作者：谭志中（1965－　），男，教授，硕士生导师，主要从事理论物理研究与物理教育研究．

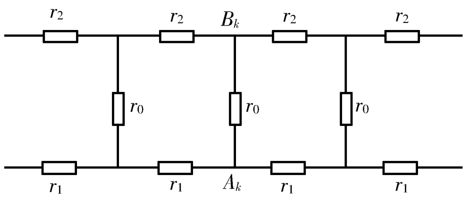

图 2　含有电阻参数的环形网络部分电路图

研究发现，边界上含有 N 个节点的环形网络可以压缩成为矩形电阻网络. 分别考虑节点为奇数和偶数的情形，最终结果是：对于 $N=2n$ 条边和 $N=2n+1$ 条边的环形网络都可以转化成为 $1\times n$ 阶矩形网络.

(1)当环形边界上的节点数为偶数的情形

对于节点数为 $N=2n$ 的环形网络，其俯视图如图 3 所示的结构. 如果在 A_1，B_1 节点间接入恒定电压，根据对称性，则电位必然有

$$U(A_{k+2})=U(A_{2n-k})$$

$$U(B_{k+2})=U(B_{2n-k})$$

其中 $k=0,1,2,\cdots,2n$.

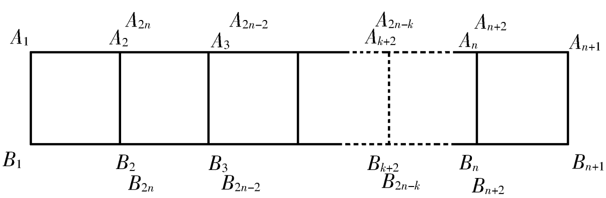

图 3　$2n$ 环形网络的拉压俯视图

因此，图 3 可以进一步等效成为图 4 结构的电阻网络. 设环形网络上下边上的单元电阻分别为 r_1 和 r_2，连接上下边的轴线上的电阻为 r_0，则在图 4 中有

$$r'=\frac{r_0}{2}\qquad r_1'=\frac{r_1}{2}\qquad r_2'=\frac{r_2}{2}$$

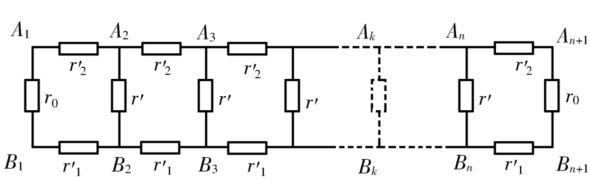

图 4　边数为 $2n$ 环形网络压缩后的电阻参数图

根据图 4 结构可以计算出节点间的等效电阻.

(2)首先考虑环形网络的节点数为奇数的情形，即节点数为 $N=2n+1$ 的情形

将环形网络拉压成图 5 所示的结构. 如果在 A_1，B_1 节点间接入恒定电压，则电位必然有

$$U(A_{k+3})=U(A_{2n-k})$$

$$U(B_{k+3})=U(B_{2n-k})$$

其中 $k=0,1,2,\cdots,(2n+1)$，并且有

$$U(A_{n+2})=U(A_{n+1})$$

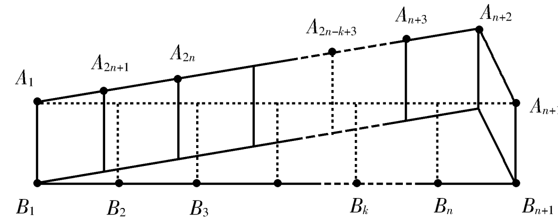

图 5　$2n+1$ 阶环形网络的拉压情形

那么，图 5 可以进一步等效成为图 6 结构的网络，其中

$$r'=\frac{r_0}{2}\qquad r_1'=\frac{r_1}{2}\qquad r_2'=\frac{r_2}{2}$$

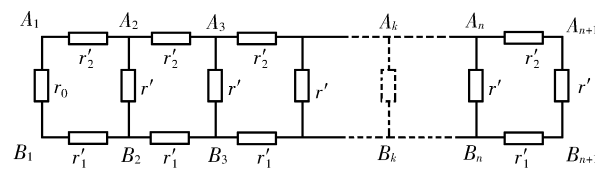

图 6　边数为 $2n+1$ 环形网络压缩后的电阻参数图

根据图 6 结构的模型可以计算出 A_1，$B_1(n)$ 节点间的等效电阻. 请注意，图 4 与图 6 存在差别，主要是右边界的电阻不同.

2　等效模型的统一建构

研究上述两种情形的等效电阻 $R_{A_1B_1}(N)$ 时，需要先计算不包含两端边界的等效电阻 R_n 的通用公式，可以采用如下模型进行统一建构.

在 $N=2n$ 环形网络与 $N=2n+1$ 环形网络的统一结构中的唯一区别是初始项不同(图 4 与图 6 右边界的电阻不同)，边数为 $2n$ 情形下的初始项为 $R_0=r_0$；边数为 $2n+1$ 情形下的初始项为 $R_0=r'=\frac{r_0}{2}$. 图 7 中的参数为

$$r'=\frac{r_0}{2}\qquad r_1'=\frac{r_1}{2}\qquad r_2'=\frac{r_2}{2}$$

为了研究方便，简记

$$r_1+r_2=2r$$

则

$$r_1'+r_2'=r$$

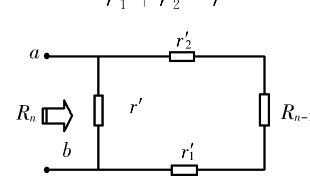

图 7　等效二端口模型

根据等效模型图 7 可以得到其等效电阻的递推公式

$$R_n=\frac{r_0(r+R_{n-1})}{r_0+2r+2R_{n-1}} \tag{1}$$

下面采用变量代换技术给出递推式(1)的解.

假设存在数列$\{x_n\}$，并且采用下列变换关系

$$R_n=\frac{x_{n+1}}{x_n}-\left(\frac{r_0}{2}+r\right) \tag{2}$$

可以规定初始项 $x_0=1$，利用式(2)得到初始条件

$$x_0=1$$

$$x_1=R_0+\frac{r_0}{2}+r \tag{3}$$

将式(2)及其递推式 R_{n-1} 代入式(1)化简得到

$$x_{n+1}=(r_0+r)x_n-\frac{1}{4}r_0^2x_{n-1} \tag{4}$$

根据文献[1]建立的理论可知差分式(4)的特征方程为

$$x^2=(r_0+r)x-\frac{1}{4}r_0^2 \tag{5}$$

设 α 和 β 分别为式(5)的 2 个特征根，解此特征方程得到

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{1}{2}\left[r_0+r+\sqrt{r(2r_0+r)}\right]\\ \beta&=\frac{1}{2}\left[r_0+r-\sqrt{r(2r_0+r)}\right]\end{aligned} \tag{6}$$

其中

$$r=\frac{r_1+r_2}{2}$$

因此式(4)能够变换成为一个简单的方程

$$x_{n+1}=(\alpha+\beta)x_n-\alpha\beta x_{n-1} \tag{7}$$

根据文献[1]中建立的方法解差分方程式(7)得到

$$x_n=\frac{1}{\alpha-\beta}[(x_1-\beta x_0)\alpha^n-(x_1-\alpha x_0)\beta^n] \tag{8}$$

将初始条件式(3)代入式(8)，得到(利用 $\alpha+\beta=r_0+r$)

$$x_n=\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\left(R_0-\frac{r_0}{2}+\alpha\right)\alpha^n-\left(R_0-\frac{r_0}{2}+\beta\right)\beta^n\right] \tag{9}$$

将获得的结论式(9)及其递推式代入关系式(2)得到

$$R_{n-1}=\frac{\left(R_0-\frac{r_0}{2}+\alpha\right)\alpha^n-\left(R_0-\frac{r_0}{2}+\beta\right)\beta^n}{\left(R_0-\frac{r_0}{2}+\alpha\right)\alpha^{n-1}-\left(R_0-\frac{r_0}{2}+\beta\right)\beta^{n-1}}-\left(\frac{r_0}{2}+r\right) \tag{10}$$

其中 R_0 的值(图 4 与图 6 右边界的电阻值)由环形网络边界上节点数的奇数和偶数决定.

3　两个电阻公式

(1)当节点数为 $N=2n+1$ 时，依据图 6 有 $R_0=\frac{r_0}{2}$，代入式(10)得到

$$R_{n-1}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha^n-\beta^n}-\left(\frac{1}{2}r_0+r\right) \tag{11}$$

所以，节点数为 $2n+1$ 情形时 A_1，B_1 两节点间的等效电阻

$$R_{A_1B_1}(2n+1)=r_0\,/\!/\,(r+R_{n-1})$$

则应用式(11)得到

$$\frac{R_{A_1B_1}(2n+1)}{r_0}=\frac{(2\alpha-r_0)\alpha^n-(2\beta-r_0)\beta^n}{(2\alpha+r_0)\alpha^n-(2\beta+r_0)\beta^n} \tag{12}$$

(2)当节点数为 $N=2n$ 时，依据图 4 有 $R_0=r_0$，则由式(10)得到

$$R_{n-1}=\frac{(r_0+2\alpha)\alpha^n-(r_0+2\beta)\beta^n}{(r_0+2\alpha)\alpha^{n-1}-(r_0+2\beta)\beta^{n-1}}-\left(\frac{r_0}{2}+r\right) \tag{13}$$

所以，节点数为 $2n$ 的情形时 A_1，B_1 两节点间的等效电阻

$$R_{A_1B_1}(2n)=r_0\,/\!/\,(r+R_{n-1})$$

则应用式(13)得到

$$\frac{R_{A_1B_1}(2n)}{r_0}=\left(\frac{\alpha-\beta}{2r_0+r}\right)\left(\frac{\alpha^n+\beta^n}{\alpha^n-\beta^n}\right) \tag{14}$$

其中记　$r=\frac{r_1+r_2}{2}$

为此，这里采用压缩变换的方法得到了 N 阶环形网络的等效电阻公式.

4　特殊情形与讨论

情形 1：当 $N=1$ 时，其电路模型如图 8 所示，此时 N 为奇数，等效电阻公式适用于式(12)，在式(12)中设 $n=0$，得到

$$\frac{R_{A_1B_1}(1)}{r_0}=\frac{(2\alpha-r_0)\alpha^0-(2\beta-r_0)\beta^0}{(2\alpha+r_0)\alpha^0-(2\beta+r_0)\beta^0}=1 \tag{15}$$

显然得到 $R_{A_1B_1}(1)=r_0$，此结论与实际电路计算的结果完全相同. 此即验证了 $N=1$ 时所得结论的正确性.

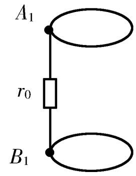

图 8 $N=1$ 的环形网络

情形 2:当 $N=2$ 时，其电路模型如图 9 所示，此时 N 为偶数，等效电阻公式适用于式(14)，在式(14)中设 $n=1$，得到

$$R_{A_1B_1}(2)=r_0\left(\frac{\alpha-\beta}{2r_0+r}\right)\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)=\frac{r_0+r}{2r_0+r}r_0 \tag{16}$$

其中利用了 $\alpha+\beta=r_0+r$. 实际电路的计算

$$R_{A_1B_1}(2)=r_0 /\!/ (r+r_0)=\frac{r+r_0}{r+2r_0}r_0$$

显然得到的等效电阻式(16)与实际电路计算的结果完全相同. 此即验证了 $N=2$ 时所得结论的正确性.

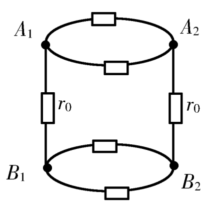

图 9 $N=2$ 的环形网络

情形 3:当 $N=3$ 时，其电路模型如图 10 所示，此时 N 为奇数，等效电阻公式使用式(12)计算，在式(12)中设 $n=1$，得到

$$\frac{R_{A_1B_1}(3)}{r_0}=\frac{(2\alpha-r_0)\alpha-(2\beta-r_0)\beta}{(2\alpha+r_0)\alpha-(2\beta+r_0)\beta}=$$

$$\frac{2(\alpha+\beta)-r_0}{2(\alpha+\beta)+r_0}=r_0\ \frac{r_0+2r}{3r_0+2r} \tag{17}$$

其中利用了 $\alpha+\beta=r_0+r$. 通过对实际电路图 10 计算时所得结果与式(17)完全相同，此即验证了 $N=3$ 时所得结论的正确性.

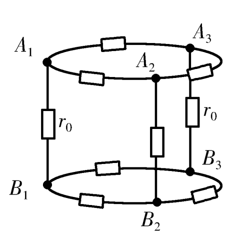

图 10 $N=3$ 的环形网络

以上利用实际电路验证了文章所得结论的正确性. 当然，由于本文所有计算都是严格的理论推导，所有的方程与结果都是自洽的，因而所得结论必然是正确的. 本文采用灵活转化的方法进行研究，为研究复杂网络模型提供了一种新思路，为广大物理教育工作者开展科学探究提供了新的实践案例.

参考文献

1 谭志中. 电阻网络模型[M]. 西安:西安电子科技大学出版社，2011.3～160

2 陆建隆，谭志中. 关于梯形网络等效电阻的普适研究[J]. 大学物理,2001,20(10):26～28

3 谭志中，赵素英. N 阶电阻网络等效电阻的研究[J]. 河北师范大学学报(自然科学版)，2004,28(2):149～154

4 李建新，刘栓江. N 级梯形电阻网络的研究[J]. 大学物理，2003，22 (7) ：20～21

5 李永安. 梯形网络等效电阻网络分析的再研究[J]. 大学物理，2003，22(10) ：12～14

6 汤华，谭志中. n 阶网络任意节点的等效电阻的研究[J]. 大学物理，2012,31 (11)：18～22

7 谭志中，杨建华. 一类含有复杂电阻的 n 阶三角形网络的等效电阻公式[J]. 大学物理，2015,34 (6)：24～35

8 谭志中，陆建隆. 多边形电阻网络等效电阻的统一建构[J]. 河北师范大学学报(自然科学版),2011,35(2):140～144

9 谭志中. 加强型多边形电阻或电容网络的等效值研究[J]. 大学物理，2011,30(12):29～32

10 谭志中. 二阶方阵 N 次幂的普适公式与应用[J]. 南通大学学报(自然科学版)，2012，11(2):60～68

11 袁莉，谭志中. 三维 $\Delta\times n$ 阶电阻网络的两个等效电阻公式[J]. 大学物理，2016,35 (3)：18～22

12 周蒨，谭志中. n 阶网络任意 2 节点间的等效电阻公式[J]. 大学物理，2017，36 (3)：20～24

13 谭志中，吴 鹏，罗小廉，等. 一类任意 n 阶 Fan 网络的电特性研究[J]. 大学物理，2018,37(8):24～28

14 Chen Haixiang，Yanglei. Electrical characteristics of n-ladder network with external load[J]. Indian Journal of Physics，2020，94(6):801～809

15 Chen Haixiang，Tan Zhizhong. Electrical properties of an n-order network with Y circuits[J]. Physica Scripta，2020，95，085204

16 Chen Haixiang，Li Na，Li Zitian，et al，Electrical characteristics of a class of n-order triangular network[J]. Physica A，2020，540,123167

17 Zhang Jiawei，Fu Nan，Yang Lei，et al. Equivalent resistance of n-step networks with △ structure[J]. Results in Physics，2019，15,102745