

通电直螺线管自感与互感的物理图像*

王 鹏

(忻州师范学院物理系 山西 忻州 034000)

(收稿日期:2020-12-17)

摘要:对两根通电直螺线管串联时的等效总自感系数进行了分析,解释了两个不同计算公式之间的矛盾之处.通过建立自感与互感现象的物理图像,避免学生过于专注数学公式而忽略对物理本质的理解,有助于提高相关课程内容的教学效果.

关键词:自感系数 互感系数 物理图像

1 引言

通过几个学期分别对不同专业的大学生教授大学物理课程,发现学生们普遍对自感与互感现象中的部分学习内容不能很好地理解和掌握.学生们对通电直螺线管的自感/互感现象的描述、自感/互感系数的定义与计算表示能够理解,但是对两根直螺线管在顺接和逆接时的总自感系数计算公式则表示困惑.主要体现在以下两个方面:

(1)两根通电直螺线管串联后的总自感系数($L_{\text{总}}$)的计算公式为

$$L_{\text{总}} = L_1 + L_2 \pm 2M \quad (1)$$

其中 L_1 与 L_2 分别表示两根螺线管的自感系数, M 为二者之间的互感系数.

两根螺线管顺接串联时公式取加号,逆接串联时则取减号.不少学生认为,当螺线管由顺接变为逆接时,两根螺线管内部的磁场方向将从同方向变为反方向,因此不仅 M 前面的加减计算有所变化, L_1 与 L_2 之间的加减计算也应该有所变化,学生普遍对 L_1 与 L_2 始终相加表示困惑.

(2)教材中提到,对无限长或长度远大于半径的通电螺线管(以下称为“理想螺线管”),其自感系数计算如下

$$L = \mu \frac{N^2}{l} S = \mu n^2 l V = \mu n^2 V \quad (2)$$

其中 μ , N , n , l , S 和 V 分别为螺线管内部介质的磁导率、线圈匝数、单位长度匝数、螺线管长度、螺线管面积和螺线管内部空间的体积.这样来看,螺线管在 S 和 n 不变时,自感系数与长度成正比.但是,式(1)表明,即使是两个相同的螺线管串联后,总自感系数也并不简单地等于两个自感系数之和,显然式(1)与式(2)矛盾.并且,教材中也提到:“若将一个自感线圈截成相等的两段,每一段自感线圈不是原来的 $\frac{1}{2}$,而是原来的 $\frac{1}{4}$.”^[1]这一结论在无漏磁的情况下与式(1)相符,但是与式(2)矛盾.

由于自感与互感并不算是大学物理课程的重点教学内容,因此对于以上两个问题,大学物理教材中几乎都没有给出详细的解释.另外,虽然有一些文章采用数学分析的方法对上述两个公式进行了分析^[2~8],但是较多的数学公式使学生们专注于计算,不利于学生构建清晰的物理图像.“物理图像”并不是简单的“物理模型”.“物理模型”的一个重要特点是忽略一个过程或现象的次要因素而凸显主要因素,比如“质点”和“刚体”就是最常见的物理模型.构建“物理模型”的过程就是寻找“理想化的近似”,目的是为了更方便地进行数学运算并得出定量结论.而“物理图像”则是一个物理定律或结论在抛开数学计算之后所留下的物理内涵,仅能够通过近乎笼统

* 山西省高等学校科技创新项目,项目编号:2020L0538;忻州师范学院科研基金资助项目 2019KY06

作者简介:王鹏(1991-),男,博士,讲师,主要研究方向为碳纳米材料的基础物性及其应用研究.

的语言甚至脑海中的图像来描述。“物理图像”对一个过程或现象的描述往往不够精确(因为没有数学运算的过程),却最能表示物理本质和物理逻辑。如果学生们能够摆脱数学计算而掌握物理内涵,就代表学生理解了,而非“记住”了所学的内容。学生不仅可以实现知识的“理解记忆”,也能够很好地进行“学习迁移”,能够发现很多看起来完全不同的知识之间的内在联系,构建“知识框架”,学习效率也会大大提高。但这也要求教师本身就对知识有深刻的认识,并在教学过程中对学生加以正确的引导。

因此,本论文针对学生的学习困惑,通过“物理语言”而非数学公式对自感与互感部分的内容进行分析,帮助学生能够更好地理解自感与互感现象,不仅掌握通电螺线管自感系数与互感系数的计算方法,也能够建立正确的物理图像。

2 通电螺线管串联的等效总自感系数分析

2.1 两根通电螺线管串联时的自感系数关系

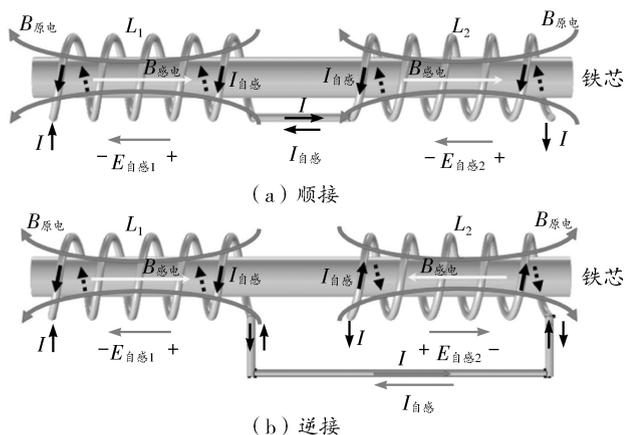
通电螺线管的自感电动势($E_{\text{自感}}$)计算式为

$$E_{\text{自感}} = -L \frac{dI}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt} \quad (3)$$

其中 L 、 I 和 Ψ 分别为螺线管的自感、通入电流和磁链数。可以看到,式(3)的本质就是法拉第电磁感应定律,自感系数 L 可以表征螺线管的自感能力,即计算自感电动势的大小。基于这一点,可以先从数学上分析两根螺线管的串联问题。如图1(a)和(b)所示,两根通电螺线管分别通过顺接和逆接的方式进行串联,自感系数分别为 L_1 和 L_2 。当电路中通入了变化的电流 I 时,两根螺线管将同时产生自感电动势,其方向可以利用楞次定律判断,其大小可以通过式(3)计算。不失一般性,可以先假设图1电流 I 此时具有增强的趋势,则两根螺线管将分别产生 $E_{\text{自感}}$,方向如图1(a)和(b)中所示,感应电流方向($I_{\text{自感}}$)如图所示。显然,无论两根螺线管顺接还是逆接,它们所产生的感应电流方向相同,满足串联关系。这表明两根串联在一起的螺线管具有相同方向的自感响应,与连接方式无关。

从数学角度看,自感系数的定义式,即式(3)是一个常系数的线性微分算式,因此,感应电动势的方向是否相同决定了在计算总自感系数时 L_1 与 L_2 的加减情况。如图1(a)所示,顺接情况下两个自感

电动势的方向一致,满足串联关系;在不考虑互感的情况下,电路中的总自感电动势等于两个自感电动势相加。而在逆接情况下,如图1(b)所示,两根螺线管的感应电动势方向呈现为一个“向左”一个“向右”,看起来二者似乎方向相反,应当在计算中作差,但实际上,如果顺着导线的方向观察,例如沿着 $I_{\text{自感}}$ 的方向,可以看到两个电动势方向其实一致,均与原电流方向相反。因此,逆接情况下计算总自感电动势时也应当将两个自感电动势相加。以上分析表明,两根串联的螺线管中所产生的自感电动势方向始终一致,与串联方式无关,因此两个自感系数 L_1 与 L_2 在计算总自感系数的过程中应始终相加。



实线黑色箭头表示电流从螺线管的前面流过,虚线黑色箭头表示电流从螺线管的后面流过。 $B_{\text{原电}}$ 和 $B_{\text{感电}}$ 分别是由原电流 I 所引起的磁场和感应电流引起的磁场

图1 两根通电螺线管串联示意图

接下来尝试摆脱数学公式,从物理图像的角度来印证上述结论。如前所述,同一电路中的两根螺线管在电流 I 变化时将同时产生自感电动势。根据楞次定律,每一个自感线圈所产生的 $E_{\text{自感}}$ 以及 $I_{\text{自感}}$ 的“责任”和“目标”都是为了削弱电流变化所带来的影响,即阻碍磁通量的变化。那么,两根螺线管只要是串联,导线中流过的就是相同的电流,产生的就是相同的磁场,电流变化对两根螺线管造成的影响就是相同的,则阻碍磁通量变化这一“责任”和“目标”对两根螺线管来说也是一致的。这种一致性与两根自感线圈的顺接或逆接以及电流增大或减小没有关系。既然两根螺线管的“责任”始终一致,在串联时二者“齐心协力”地达成“目标”,产生同方向的 $E_{\text{自感}}$ 以及 $I_{\text{自感}}$,计算总自感系数时将 L_1 和 L_2 相加也就很自然了。

综上所述,自感现象的本质就是电磁感应现象,感应的方向遵循楞次定律,感应的强弱则遵循法拉第电磁感应定律.而从“自感”字面可以看出,此时的感应现象只与螺线管自身有关,即所产生的感应电动势的方向仅仅与自身的电流方向和变化趋势有关,而与另外一根螺线管无关.因此无论两根通电螺线管顺接还是反接,只要是串联,电流变化在两根螺线管中所引起的两个自感电动势就必须共同肩负起阻碍磁链或电流变化的“责任”,体现在数学公式上则为二者相加,即计算螺线管串联的总自感系数时,两个自感系数总是相加的.

也可以根据以上物理图像来解释式(1)中互感系数对总自感系数的影响.互感系数的定义式与自感系数[即式(3)]相近,区别仅在于互感系数表示的是两根螺线管之间的相互影响程度.当两根螺线管顺接串联时,如图1(a)中所示,各自所产生的磁场与另一根螺线管中的磁场方向相同[图1(a)中两组 $B_{原电}$ 方向相同],此时因电流变化而引起的互感电动势($E_{互感}$)与自感电动势的“责任”一致,都是为了阻碍电流的变化,因此在计算中 L 与 M 应当相加;而两根螺线管逆接串联时, $E_{自感}$ 与 $E_{互感}$ 的“责任”虽然一致,都是为了维持电流或磁通量不变,但二者的“目标”却并不一致.如图1(b)中所示,两根螺线管所要维持的磁通量方向正好相反(图1(b)中两组 $B_{原电}$ 方向相反),因此 $E_{自感}$ 与 $E_{互感}$ 的方向相反,导致在计算自感系数时 L 与 M 应当相减.由于两根螺线管均可以引起对方产生互感电动势,电路中存在两个相等的 $E_{互感}$ (两个互感系数相等且串联时电流的变化相等),且这两个 $E_{互感}$ 的方向均同时与自身的 $E_{自感}$ 同向(顺接时自感与互感电动势相加)或反向(逆接时自感与互感电动势相减),因此,两根螺线管串联后的总自感系数可以用公式(1)进行计算.值得指出的是,公式(1)无论从数学角度还是物理图像角度分析都没有施加任何特定条件,因此是普适的,具有一般性.

以上分析过程着重阐述了两螺线管串联时电磁感应现象互相耦合的物理图像,在无需借助数学公式的情况下就可以解释数学计算问题,更有助于加强学生对物理知识的“感性认识”,避免教师和学生过多地专注数学公式的计算而忽略了物理现象的内涵.

2.2 两根通电螺线管串联时的等效总自感系数计算

接下来我们同样结合数学公式和物理图像来解释式(1)和(2)之间的“矛盾”问题.如图2所示,对一个非理想的螺线管,其内部磁场的计算公式应通过毕奥-萨伐尔定律计算如下

$$B = \frac{\mu n I}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \quad (4)$$

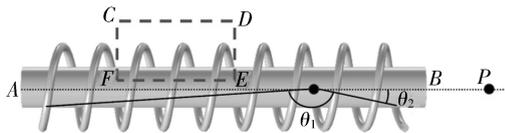


图2 计算直通电螺线管轴上各点磁感应强度示意图

对理想螺线管,无限长或长度远大于半径, θ_1 和 θ_2 分别趋近于 π 和零,式(4)简化为 $B = \mu n I$.当然,利用磁场中的环路定理可以更快地得到理想螺线管的这个结论.如图2所示,选择一个磁场中的闭合回路CDEF,根据环路定理得

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_{EF} \cdot \overline{EF} + B_{FC} \cdot \overline{FC} + B_{CD} \cdot \overline{CD} + B_{DE} \cdot \overline{DE} \quad (5)$$

对理想螺线管,内部磁场(B_{EF})是匀强的而外部无磁场($B_{CD} = 0$), CF 与 DE 均垂直于磁场,因此得到 $B = \mu n I$.若理想螺线管的体积 $V = lS$,内部磁链数 $\Psi = NBS = LI$,代入 $B = \mu n I$ 中则可以得到式(2).可以看到,上述推导过程使用了“理想螺线管”这一条件,表明式(2)仅针对理想螺线管才有效,并不具有一般性,不能用于普通螺线管自感系数的计算.因此,式(1)与式(2)只对理想螺线管才可以同时使用并得到一致的结论,对普通螺线管的自感系数进行计算必然会产生不同的结果.因此,从数学角度上可以认识到所谓“矛盾”是来自于两个公式的适用范围不一致.

实际上,理想螺线管外部无磁场这一条件除了可以用于式(5)的计算外,还能够得出另一个容易被忽略的结论:两根理想螺线管之间是没有互感的.这个结论可以从式(4)中得到.例如,计算图2中 P 点处的磁场时, P 点在螺线管外,该处磁场必然小于螺线管端部中心(A, B 两点)的磁场 $\frac{\mu n I}{2}$. P 点处所对应的 θ_1 和 θ_2 均为钝角,二者的余弦值较为接近,随着 P 点逐渐远离螺线管, θ_1 和 θ_2 余弦值的差将迅速

减小, P 点处的磁场也将越来越小, 在有限的距离内就将远小于螺线管内部的磁场, 可以近似为零. 因此必须强调, 理想螺线管的附近其实是有磁场的, 但是对无限长且通有相同电流 I 的另一根理想螺线管来说, 第一根螺线管的外部磁场所引起的磁通量是完全可以忽略的, 也就是说互感电动势可以忽略不计, 即 $M=0$.

从物理图像的角度也可以得到上述结论. 互感现象是由于一根通电螺线管所产生的磁感线进入另一根螺线管并发生数目变化所导致的. 而磁感线是闭合的, 它在理想螺线管内部均匀排列, 在螺线管外部则遍布全空间, 因此磁感线在螺线管外部极其稀疏, 磁感应强度可以视为零, 进入另一根螺线管的磁感线数目(即磁通量)也可以视为总是零, 因此不会导致互感现象. 综上所述, 没有互感这一结论只能用于两根理想螺线管之间, 两根非理想螺线管之间则是存在互感的. 显然, 互感系数受到两根螺线管之间的位置与取向, 以及是否有铁芯等因素影响.

以上分析表明两根理想螺线管之间的互感系数 M 等于零. 此时再去看看式(1)和(2), 两根理想螺线管串联后的总自感系数无需考虑互感, 简单地等于两个自感系数之和, 与长度成正比, 两个公式的结果一致. 可以看到, 正是由于忽视了两根螺线管之间的互感系数 M 的取值情况才导致了所谓的“矛盾”.

3 结论

式(1)可以从法拉第电磁感应定律或者麦克斯

韦方程组得到, 是计算两根通电螺线管串联时总自感系数的普适公式. 但是式(2)则只对理想螺线管模型(长度远大于半径或无限长有限粗)适用, 因此在使用每一个公式时应当清楚公式的来源和公式中每个物理量的物理意义, 才会保证对物理公式的使用以及对物理概念的理解不会出错. 另外, 在教学过程中适当地引入简洁的图形和定性分析有助于学生建立正确的物理图像, 避免学生过于专注数学公式而忽略对物理本质的追求.

参考文献

- 1 赵近芳, 王登龙. 大学物理学(下)(第5版)[M]. 北京: 北京邮电大学出版社, 2017. 99
- 2 陈小凤, 何晓燕, 张正阶. 一道关于自感系数的习题求解引起的思考[J]. 新课程(下), 2013(7): 182~183
- 3 葛宇宏, 葛志利. 有限长多层直螺线管的自感系数[J]. 大学物理, 2010, 29(7): 16~19
- 4 江俊勤. 有限长密绕圆柱形螺线管自感系数的精确计算[J]. 广东教育学院学报, 2010, 30(3): 32~34
- 5 邝向军, 贾连宝. 多线圈并接耦合时的等效自感系数计算[J]. 平顶山学院学报, 2018, 33(5): 48~52
- 6 雷静. 线圈整体与局部自感系数的关系[J]. 物理与工程, 2004, 14(4): 54~55
- 7 王树平, 谢革英, 崔红娜. 三种方法求证串连线圈的等效自感系数[J]. 河北建筑工程学院学报, 2006, 24(1): 88~90
- 8 赵纯. 关于螺线管串联自感系数的探讨[J]. 广西物理, 2011, 32(1): 40~42

The Physical Image of Self-inductance and Mutual Inductance of Electrified Straight Solenoid

Wang Peng

(College of Physics, Xinzhou Teachers University, Xinzhou, Shanxi 034000)

Abstract: The equivalent self-induction coefficient of two electrified straight solenoids in series is analyzed, and the contradiction between two different calculation formulas is explained. By establishing physical pictures of self-inductance and mutual inductance, focusing too much on mathematical formulas while ignoring the physical nature is avoided, which is beneficial to improve the teaching effect of relevant contents.

Key words: self-inductance; mutual inductance; physical picture