

# 有关科氏加速度的疑难问题探究

郑 金

(凌源市职教中心 辽宁 朝阳 122500)

(收稿日期:2020-12-26)

**摘 要:**以水平面内匀速转动直杆上的质点做相对直线运动为例,用一种特别的方法推导出科氏加速度公式的矢量式;以匀速转动的水平圆盘上的质点做相对运动为例,对于无约束的情况,探究了科氏加速度公式;利用科氏加速度公式和微积分知识解答一个实际问题.

**关键词:**科氏加速度 科氏力 相对运动 约束

科里奥利加速度和科里奥利力是理论力学教学中的重点和难点,有关科氏加速度和科氏力的疑难问题较多,本文将选择其难度较大而且比较有趣的3个方面进行答疑解惑,通过具体问题进行分析说明.

## 1 推导科氏加速度公式的矢量式

在图1中,动点沿直杆AB运动,而杆又绕A轴匀速运动.设直杆匀速转动的角速度为 $\omega$ ,动系固结在杆AB上.在瞬时 $t$ ,动点在M处,它的相对速度和牵连速度分别为 $v_r$ 和 $v_e$ .经过时间间隔 $\Delta t$ 后,杆转到位置 $AB'$ ,动点移动到 $M_3$ ,这时它的相对速度为 $v'_r$ ,牵连速度为 $v'_e$ .设动点的相对加速度和牵连加速度分别为 $a_r$ 和 $a_e$ .试证明下面两个等式<sup>[1]</sup>:

$$\frac{dv_r}{dt} = a_r + \omega \times v_r \quad \frac{dv_e}{dt} = a_e + \omega \times v_r$$

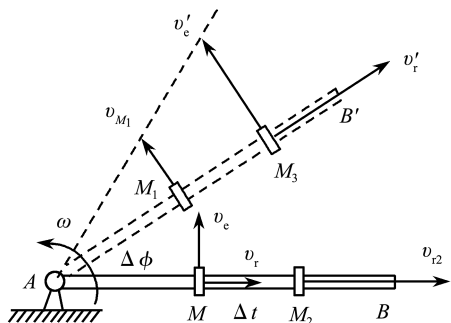


图1 动系做圆周运动

可利用加速度定义、极限知识以及矢量的叉积知识来证明.

首先证明第一个等式.由图1可知,若不考虑相对速度方向变化,则质点沿杆方向的相对加速度为

$$a_r = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{r2} - v_r}{\Delta t}$$

在图2中,相对速度大小满足 $v_{r2} = v'_r$ ,将相对速度矢量 $v_{r2}$ 与 $v'_r$ 进行平移,始端重合于O点,如图2所示,可知相对速度矢量三角形为等腰三角形,其中底边的长度 $\Delta v_r$ 表示相对速度变化量的大小.

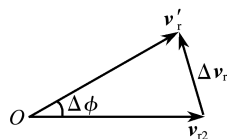


图2 相对速度矢量三角形

在很短时间内,等腰三角形可视为由匀速圆周运动形成的扇形,底边长度近似等于圆弧长度,而当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,有 $v_{r2} \rightarrow v_r$ ,可知因方向变化而产生的相对速度变化量的大小为 $\Delta v_r \approx v_{r2} \Delta \phi \approx v_r \omega \Delta t$ .

由此可得相对速度变化率的大小为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_r}{\Delta t} = \omega v_r$$

在很短时间内,圆心角 $\Delta \phi$ 很小,由图2可知相对速度变化量的方向几乎垂直于相对速度的方向,即垂直于约束轨道.由于矢量 $\omega$ 与 $v_r$ 垂直,利用右手螺旋定则可知叉积 $\omega \times v_r$ 的方向也垂直于约束轨道,即与相对速度变化量的方向一致,由此可知,因相对速度方向变化而产生的加速度的矢量式为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v'_r - v_{r2}}{\Delta t} = \omega \times v_r$$

由图1可知,相对速度矢量的总变化率为

$$\frac{dv_r}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v'_r - v_r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(v'_r - v_{r2}) + (v_{r2} - v_r)}{\Delta t}$$

考虑到数学公式<sup>[2]</sup>

$$\lim[f(x) + g(x)] = \lim f(x) + \lim g(x)$$

可得  $\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}'_r - \mathbf{v}_{r2}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}_{r2} - \mathbf{v}_r}{\Delta t}$

即  $\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \mathbf{a}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$

这表明, 相对速度矢量的变化率等于相对加速度与科氏加速度一半的矢量和。

下面证明第二个等式. 牵连速度矢量的总变化率为

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}'_e - \mathbf{v}_e}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{v}'_e - \mathbf{v}_{M1}) + (\mathbf{v}_{M1} - \mathbf{v}_e)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}'_e - \mathbf{v}_{M1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}_{M1} - \mathbf{v}_e}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\boldsymbol{\omega} \times (\overrightarrow{AM_3} - \overrightarrow{AM_1})}{\Delta t} + \mathbf{a}_e = \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{M_1 M_3}}{\Delta t} + \mathbf{a}_e = \\ &= \mathbf{a}_e + \boldsymbol{\omega} \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \end{aligned}$$

所以  $\frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = \mathbf{a}_e + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$

这表明, 牵连速度矢量的变化率等于牵连加速度与科氏加速度一半的矢量和。

由于绝对速度等于相对速度与牵连速度的矢量和, 即  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e$ , 可知

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_e}{dt}$$

即  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$

这表明, 绝对加速度等于相对加速度、牵连加速度与科氏加速度的矢量和<sup>[3]</sup>。

所以科氏加速度公式的矢量式为  $\mathbf{a}_C = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$ 。

综上所述, 已证明的两个等式都与科氏加速度有关. 对于在平面内做匀速转动物体上的质点的相对直线运动, 每个等式右边的两个矢量都是相互垂直的, 即为纵向加速度与横向加速度. 第一个等式表示相对速度矢量的变化率, 是由相对速度发生变化引起的合加速度, 可正交分解为两部分, 其一是由相对速度大小发生变化而产生的相对加速度, 即纵向分量大小为  $\frac{dv_r}{dt} = a_r$ ; 其二是由相对速度方向发生变化而产生的科氏加速度的一半, 即横向分量大小为  $\frac{\Delta v_r}{\Delta t} = \omega v_r$ . 第二个等式表示牵连速度矢量的变化率, 是由牵连速度发生变化引起的合加速度, 可正交分解为两部分, 其一是由牵连速度方向发生变化而

产生的纵向牵连加速度  $a_{e//} = \frac{\Delta v_e}{\Delta t}$ , 即向心加速度大小为  $a_n = r\omega^2$ ; 其二是由牵连速度大小发生变化而产生的科氏加速度的一半, 即横向加速度大小为  $\frac{dv_e}{dt} = \omega v_r$ , 其中  $v_e = \omega r$ .

相对运动(质点沿杆运动)改变了牵连速度  $\omega r$  的大小, 产生了横向加速度  $\omega v_r$ ; 同时, 牵连运动(直杆转动)改变了相对速度  $v_r$  的方向, 由此产生横向加速度  $\omega v_r$ , 二者之和为科氏加速度  $2\omega v_r$ .

## 2 在无刚性约束情况下的科氏加速度公式

如图 3 所示, 有一水平圆盘以角速度  $\omega$  匀速转动, 圆盘表面光滑, 一质点在沿半径方向相对于地面以速度  $v$  做匀速离心运动, 若开始位置到圆心的距离为  $r_0$ , 求质点相对于圆盘运动的科氏加速度随时间变化的关系式。

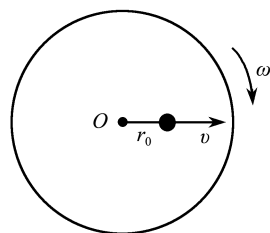


图 3 质点在水平转盘上运动

在地面参考系中, 质点做匀速直线运动. 在圆盘参考系中, 质点做曲线运动, 由此可知, 在非惯性系中, 质点产生了加速度, 而且受到惯性力的作用。

对于沿顺时针方向转动的圆盘, 若假设圆盘静止不动, 则质点相对于圆盘向逆时针方向偏转, 如图 4 所示. 质点在沿半径方向做匀速直线运动, 速度为  $v_{//} = v$ , 在垂直于半径方向的速度为  $v_{\perp} = \omega(r_0 + vt)$ , 相对于圆盘的合速度为

$$v_r = \sqrt{v_{//}^2 + v_{\perp}^2} = \sqrt{v^2 + \omega^2(r_0 + vt)^2}$$

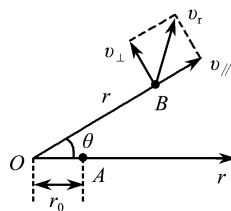


图 4 质点相对于转盘偏转

可知在垂直于相对速度方向的科氏加速度为

$$a_C = 2\omega v_r = 2\omega \sqrt{v^2 + \omega^2(r_0 + vt)^2}$$

值得注意的是,在垂直于半径方向的科氏加速度  $a_{c\perp} = 2\omega v_{\parallel} = 2\omega v$  只是一个分量,但在一般情况下所说的科氏力和科氏加速度,都是针对相对运动的合速度而言. 在无约束的情况下,在非惯性系中的科氏加速度与科氏力的方向相同,由图 3 和图 4 已知圆盘转动的角速度、相对速度以及科氏加速度三者的方向,为了遵循右手螺旋定则,科氏加速度公式的矢量式需带负号,即为  $\mathbf{a}_c = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$ . 其中的负号只用来表示方向相反.

在实际问题中,匀速转动物体不一定是直杆或圆盘,相对运动质点的初速度不一定沿半径方向,相对运动速度不一定保持不变,但科氏加速度公式和科氏力公式普遍适用.

### 3 利用科氏加速度公式解答实际问题

**【例题】**<sup>[3]</sup> 如图 5 所示,一个用金属丝做成的半径为  $R$  的光滑圆圈,绕坚直直径按逆时针方向(俯视)以角速度  $\omega$  匀速转动,圆圈上套着一个质量为  $m$  的小环,刚开始小环从圆圈的最高点无初速下滑,试求当小环与圆心的连线跟坚直方向的直径夹角为  $\theta$  时,小环的科氏加速度的大小和方向.

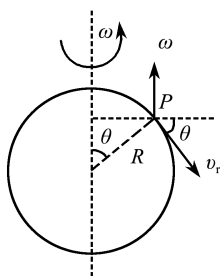


图 5 例题情境图

**解析**<sup>[3]</sup>: 圆圈绕坚直直径按逆时针方向转动,则角速度矢量的方向坚直向上. 设小环相对于圆圈的速度大小为  $v_r$ , 沿切线方向,与水平方向的夹角为  $\theta$ ,则角速度与相对速度的夹角  $\beta = 90^\circ + \theta$ ,考虑到相对速度大小为  $v_r = R\dot{\theta}$ ,由科氏加速度矢量公式  $\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$  可知科氏加速度的大小为

$$a_c = 2\omega v_r \sin \beta = 2\omega v_r \cos \theta = 2\omega R \dot{\theta} \cos \theta$$

在非惯性系中,小环除了受到重力,还受到惯性离心力,大小为  $F' = mr\omega^2 = mR\omega^2 \sin \theta$ ,方向水平向右,而相对加速度的大小为  $a_r = R\ddot{\theta}$ ,在圆圈切线方向由牛顿第二定律有  $ma_r = F' \cos \theta + mg \sin \theta$ ,即

$$mR\ddot{\theta} = mR\omega^2 \sin \theta \cos \theta + mg \sin \theta$$

对各项取积分可得

$$R(\dot{\theta})^2 = R\omega^2 \sin^2 \theta - 2g \cos \theta + C$$

利用初始条件  $\theta = 0, \dot{\theta} = 0$ ,可知  $C = 2g$ . 因此

$$R(\dot{\theta})^2 = R\omega^2 \sin^2 \theta + 2g(1 - \cos \theta)$$

所以小环在地面参考系中的科氏加速度的大小为

$$a_c = 2\omega R \dot{\theta} \cos \theta =$$

$$2\omega \sqrt{R^2 \omega^2 \sin^2 \theta + 2g(1 - \cos \theta)} \cos \theta$$

应用右手螺旋定则可知科氏加速度的方向垂直于圈面向里.

还有一种非常简单的解法:以圆圈为参考系,利用离心势能公式<sup>[4]</sup>,由机械能守恒定律列方程

$$mgR(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}mv_r^2 - \frac{1}{2}m\omega^2(R \sin \theta)^2$$

可得  $v_r^2 = 2gR(1 - \cos \theta) + \omega^2 R^2 \sin^2 \theta$ .

解题关键是求解相对速度,由于小环在圆圈的切线方向不受圆圈的弹力,因此可在切线方向应用牛顿第二定律列方程;由于小环在水平方向受到圆圈的侧向弹力对其做功,因此不能在惯性系中应用机械能守恒定律列方程. 而科氏加速度正是由侧向弹力产生,这个弹力属于非保守力,即是水平方向的约束反力,因此与科氏力大小相等,方向相反. 求出科氏加速度的意义在于可用来求侧向弹力.

总之,在圆周运动与相对运动相互影响的情况下,质点做曲线运动,由此产生科氏加速度. 在惯性系中产生科氏加速度的力是约束反力,在非惯性系中产生科氏加速度的力是科氏力. 科氏力只存在于非惯性系中,并且与洛伦兹力有相似之处. 在对叉积中的角速度与相对速度确定先后次序的条件下,对于有约束的两种情况,科氏加速度共有两个公式,即分别带正负号,而科氏力只有一个公式,带负号.

### 参考文献

- 1 段梦桂,周志宏,李美求,等.《理论力学》中科氏加速度推导证明[J]. 长江大学学报(自然科学版),2010,7(3): 189~190
- 2 同济大学数学教研室主编. 高等数学(上册)(第2版)[M]. 北京:高等教育出版社,1981. 52~53
- 3 周衍柏. 理论力学教程(第2版)[M]. 北京:高等教育出版社,1986. 244~248,262
- 4 杨振东. 离心势能教学应用3例[J]. 物理通报,2020,39(4):15~17