对一道漫灰体辐射竞赛题的一题多解及深入探讨

李　惠

（湖南省株洲市第二中学　湖南 株洲　412007）

（收稿日期：2020－12－31）

摘　要：用两种方式解答了一道漫灰体的热辐射竞赛题目，并就该题做了拓展，从不同的方向启发学生对这一知识进行深入思考和探讨．

关键词：热辐射　隔热　一题多解　物理竞赛

【试题】本题考虑热辐射的问题．有关热辐射的背景知识叙述如下：

若一物体表面的绝对温度为 T，发射率为 e，则该物体表面每单位面积在每单位时间内所辐射出的电磁波能量，称为辐射能通量，可表述为 $R=e\sigma T^4$，式中 $\sigma=5.670\times10^{-8}\ \mathrm{J/(s\cdot m^2\cdot K^4)}$，称为斯特凡-波尔兹曼常量．通常 $e<1$，但对黑体而言，$e=1$（即为完全辐射）．如果物体周围的温度为 T'，则需考虑物体表面对入射辐射能的吸收．假定入射的辐射能通量为 $\sigma T'^4$，α 为物体表面的吸收率，则该物体表面所吸收的辐射能通量为 $R'=\alpha\sigma T'^4$，通常 $\alpha<1$，但对黑体而言，$\alpha=1$（即为完全吸收）．因此物体表面对入射能量的反射率为 $1-\alpha$．如果该物体和周围的环境达成热平衡，即 $T=T'$，则物体放射出去的和所吸收的辐射能通量应相等，所以 $e=\alpha$，这就是所谓基尔霍夫定律（Kirchhoff's Law）．

现考虑两片面积很大且平行相向对立的金属板 A 和 B，其温度分别维持在 T_A 和 T_B，$T_A>T_B$．A 和 B 两金属板面的发射率分别为 e_1 和 e_2．

（1）假想在两金属板面之间有一个虚设的平行截面，试求通过该截面的净辐射能通量，以 T_A，T_B，e_1，e_2 表示．

（2）若是在两金属板中间放入另一块大面积的金属板 C，其发射率为 e，则在其达成稳定状态时的温度 T 为何？该温度是否和金属板 C 所放置的位置有关？

（3）在（2）题中，若 $e=e_1=e_2$，则在稳定状态时，两金属板之间的净辐射能通量为何？

（4）为了降低金属板 A 和 B 之间的热辐射损失，即减少两板面之间的净辐射能通量，我们可选用一块厚度为 d 的金属板，插入两金属板之间，或者选用 n 片厚度各为 $\dfrac{d}{n}$ 的金属片间隔插入两金属板之间，哪一种方式较佳？

答案：

$$R=\frac{e_1e_2\sigma(T_A^4-T_B^4)}{1-(1-e_1)(1-e_2)} \tag{1}$$

$$T^4=\frac{(e+e_2-ee_2)e_1T_A^4+(e+e_1-ee_1)e_2T_B^4}{e(e_1+e_2)+2e_1e_2(1-e)} \tag{2}$$

与板 C 位置无关．

$$T^4=\frac{T_A^4+T_B^4}{2} \tag{3}$$

$$R_{AC}=R_{BC}=\frac{1}{2}\frac{e^2\sigma(T_A^4-T_B^4)}{1-(1-e)^2} \tag{4}$$

第二种方式较佳．

1　两种方法求解（1）问

解法一：由于两金属板面不是黑体，我们必须考虑热辐射能量在两板面之间的来回反射和吸收．先单独考虑金属板 A 的热辐射情形，把 B 板看作一个只有反射无热辐射的装置；再单独考虑金属板 B 热辐射情形，此时，把 A 板看成一个只有反射无辐射的装置；最后，A，B 板间实际的辐射传热，即等于二者之差．

依照上述思路，单独考虑金属板 A 的热辐射情形以及它逐次从板面辐射的辐出度．

首次从 A 板辐射

$$R_{A0}=e_1\sigma T_A^4 \tag{5}$$

首次被 B 板反射回

$$R_{B1}=(1-e_2)R_{A0} \tag{6}$$

A 板第一次反射

$$R_{A1}=(1-e_1)R_{B1} \tag{7}$$

第二次被 B 板反射回

$$R_{B2}=(1-e_2)R_{A1} \tag{8}$$

A 板第二次反射

$$R_{A2}=(1-e_1)R_{B2} \tag{9}$$

第三次被 B 板反射回

$$R_{B3}=(1-e_2)R_{A2} \tag{10}$$

上述列出的是从 A 板发出的一系列出射波在 A,B 板之间无穷多次反射的热辐射能通量,而实际上,热辐射是不间断地进行的,上述的 R_{A0},R_{A1},R_{A2},…以及 R_{B1},R_{B2},R_{B3},…是同时存在于两金属板之间的.因此,从 A 板流向 B 板的辐射能通量为

$$\begin{aligned}R_A=&(R_{A0}+R_{A1}+R_{A2}+\cdots)-(R_{B1}+R_{B2}+R_{B3}+\cdots)=\\&(R_{A0}-R_{B1})+(R_{A1}-R_{B2})+(R_{A2}-R_{B3})+\cdots=\\&e_2R_{A0}+e_2R_{A1}+e_2R_{A2}+\cdots=\\&e_2R_{A0}+e_2(1-e_2)(1-e_1)R_{A0}+\\&e_2(1-e_2)(1-e_1)(1-e_2)(1-e_1)R_{A0}+\cdots=\\&e_2R_{A0}\Big[1+(1-e_2)(1-e_1)+(1-e_2)^2(1-e_1)^2+\\&(1-e_2)^3(1-e_1)^3+\cdots+(1-e_2)^n(1-e_1)^n\Big]\end{aligned}$$

其中,$n\to\infty$,上式中括号中是一个首项为 1,等比为 $(1-e_1)(1-e_2)<1$ 的等比数列求和.故

$$R_A=e_2R_{A0}\frac{1-(1-e_1)^n(1-e_2)^n}{1-(1-e_1)(1-e_2)}=\frac{e_1e_2\sigma T_A^4}{1-(1-e_1)(1-e_2)} \tag{12}$$

同理可推得,从 B 板流向 A 板的辐射能通量为

$$R_B=\frac{e_1e_2\sigma T_B^4}{1-(1-e_1)(1-e_2)} \tag{13}$$

则通过两金属板间某平行截面的净辐射能通量为

$$R=R_A-R_B=\frac{e_1e_2\sigma(T_A^4-T_B^4)}{1-(1-e_1)(1-e_2)} \tag{14}$$

解法二:设金属板单位面积接收辐射能通量为 G,吸收 eG,反射 $(1-e)G$,同时自身辐射 eE,其中 $E=\sigma T^4$,满足斯特凡-玻尔兹曼定律,金属板稳态平衡时,热量收支平衡,向外界辐射的有效辐射能通量为 J_{out}.

$$J_{out}-G=e(E-G) \tag{15}$$

可见 J_{out} 与 G 并不是独立的两个变量,而是存在一一对应关系的,收入能通量越大,辐出能通量 J_{out} 也越大.由式(15)解得

$$G=\frac{eE-J_{out}}{e-1} \tag{16}$$

所以,金属板向外界的净辐射能通量为

$$R=J_{out}-G=\frac{E-J_{out}}{\frac{1-e}{e}} \tag{17}$$

把上述结论分别应用于 A,B 板:A 板向外界的净辐射能通量为

$$R_A=\frac{E_A-J_{A,out}}{\frac{1-e_1}{e_2}} \tag{18}$$

B 板向外界的净辐射能通量为

$$R_B=\frac{E_B-J_{B,out}}{\frac{1-e_2}{e_2}} \tag{19}$$

达到稳态温度后,金属板 A 向外界的净辐射能通量等于金属板 B 向外界辐射的净辐射能通量的负值,也等于金属板 A 和 B 的有效辐射能通量之差,即

$$R_A=-R_B=J_{A,out}-J_{B,out} \tag{20}$$

应用合分比定理得

$$R_A=\frac{E_A-J_{A,out}+J_{A,out}-J_{B,out}-E_B+J_{B,out}}{\frac{1-e_1}{e_1}+\frac{1-e_2}{e_2}+1}=\frac{e_1e_2\sigma(T_A^4-T_B^4)}{1-(1-e_1)(1-e_2)} \tag{21}$$

2 求(2)问

可利用(1)问结论,在 A,B 板间插入金属板 C 并达到稳态温度之后,A,C 板间的净辐射能通量 R_{AC} 等于 C,B 板间的净辐射能通量 R_{CB},即

$$R_{AC}=R_{CB} \tag{22}$$

根据式(14)结论,有

$$R_{AC}=\frac{ee_1\sigma(T_A^4-T^4)}{1-(1-e_1)(1-e)} \tag{23}$$

$$R_{CB}=\frac{ee_2\sigma(T^4-T_B^4)}{1-(1-e_2)(1-e)} \tag{24}$$

联立式(22)~(24)解得

$$T^4=\frac{(e+e_2-ee_2)e_1T_A^4+(e+e_1-ee_1)e_2T_B^4}{e(e_1+e_2)+2e_1e_2(1-e)} \tag{25}$$

3　求(3)问

利用式(22)～(24)，并代入 $e=e_1=e_2$，可得

$$T_{\mathrm{A}}^4-T^4=T^4-T_{\mathrm{B}}^4 \Rightarrow T^4=\frac{T_{\mathrm{A}}^4+T_{\mathrm{B}}^4}{2} \tag{26}$$

联立式(23)、(26)得插入金属板 C 后的净辐射能为

$$R_{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\frac{e\sigma(T_{\mathrm{A}}^4-T_{\mathrm{B}}^4)}{2-e} \tag{27}$$

与式(14)比较，发现在两金属板间插入一块相同的金属板，使 A，B 板间隙数目从 1 个增加到 2 个，净辐射能通量变为原来的 $\frac{1}{2}$.

4　求(4)问

如果 A，B 板间插入一块金属板，A，B 两板间的净辐射能通量降为原来的 $\frac{1}{2}$；如果 A，B 板间插入 n 片金属板，则 A，B 板间间隙数目从 1 个增加到($n+1$)个(图 1).

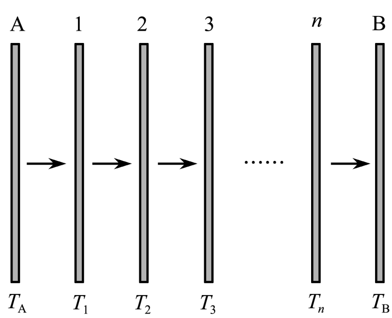

图 1　A，B 板间插入 n 块相同的金属板

由于各金属板达到稳态平衡时温度不变，净辐射能通量相等，根据式(14)，代入 $e=e_1=e_2$，可得

$$R=\frac{e\sigma(T_{\mathrm{A}}^4-T_1^4)}{2-e}=\frac{e\sigma(T_1^4-T_2^4)}{2-e}=\cdots=$$

$$\frac{e\sigma(T_n^4-T_{\mathrm{B}}^4)}{2-e}=\frac{e}{n+1}\frac{\sigma(T_{\mathrm{A}}^4-T_{\mathrm{B}}^4)}{2-e}=\frac{1}{n+1}R_{\mathrm{AB}} \tag{28}$$

其中 R_{AB} 是 A，B 板间没有其他金属板时的净辐射能通量，R 是 A，B 板间插入 n 片金属板时的净辐射能通量，可见，多层金属板相叠，间隙数目越多，单位时间内的辐射传热就越少，保温效果就更好.

5　拓展与提升

笔者给这道题再加两小问(5)和(6)，从其他方向启发学生对此类热辐射问题进行深入思考.

拓展 1：(5)常用的隔热布是多层金属薄膜构成，两两之间以网状的、聚酯纤维间隔开来. 设金属膜的发射率和吸收率都为 e. 有一种隔热布共由 11 层这样的金属膜彼此平行放置构成，用它包裹一个半径为 r，比热为 c，质量为 M 的均质球形仪器(仪器本身不发热)，放在距离太阳为 d 处，设太阳表面积为 S，太阳表面温度为 T_{s}，达到稳态时，该仪器的温度 T_{o} 是多少？

解：隔热布的功能并不是阻断热辐射，而是降低进出物体的辐射能通量，因此对稳态平衡的温度没有影响，而只是让稳态平衡较慢达成而已. 所以，我们可以不用考虑隔热布的存在，将球形仪器当成黑体，根据球形仪器能量守恒

$$S\sigma T_{\mathrm{s}}^4\frac{\pi r^2}{4\pi d^2}=4\pi r^2\sigma T_{\mathrm{o}}^4 \tag{29}$$

得

$$T_{\mathrm{o}}=T_{\mathrm{s}}\left(\frac{S}{16\pi d^2}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{30}$$

拓展 2：(6)若该球形仪器本身会发热，功率为常量 P，它和多层隔热布的最内层(第 11 层)紧密接触而保持同温，隔热布的总厚度远小于球形仪器的半径 r. 达到稳态时，多层隔热布最内层的温度 T_{in} 及最外层(第 1 层)的温度 T_{out} 分别是多少？

解：先考虑最内层热平衡，则

$$P=4\pi r^2\ \frac{e\sigma(T_{\mathrm{in}}^4-T_{10}^4)}{2-e} \tag{31}$$

式中 T_{10} 是第 10 层隔热布的温度. 接着考虑最外层热平衡

$$S\sigma T_{\mathrm{s}}^4\ \frac{\pi r^2}{4\pi d^2}=4\pi r^2\left[e\sigma T_{\mathrm{out}}^4+\frac{e\sigma}{2-e}(T_{\mathrm{out}}^4-T_2^4)\right] \tag{32}$$

式中 T_2 是第二层隔热布的温度. 又由于各层的辐射净能通量相同

$$T_{\mathrm{in}}^4-T_{10}^4=T_{10}^4-T_9^4=\cdots=$$

$$T_2^4-T_{\mathrm{out}}^4=\frac{T_{\mathrm{in}}^4-T_{\mathrm{out}}^4}{10} \tag{33}$$

联立，可得

$$T_{\mathrm{out}}=\left(\frac{P}{4\pi r^2 e\sigma}+\frac{ST_{\mathrm{s}}^4}{16\pi d^2 e}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{34}$$

$$T_{\mathrm{in}}=\left[\frac{(21-10e)P}{4\pi r^2 e\sigma}+\frac{ST_{\mathrm{s}}^4}{16\pi d^2 e}\right]^{\frac{1}{4}} \tag{35}$$