



对一道电磁感应试题中收尾状态的修正

吴泽楷 闫敬畏

(合肥一六八中学 安徽 合肥 230000)

(收稿日期:2019-04-21)

摘要:线框模型是高中物理电磁感应问题中的常见模型,只要时间足够长,线框会进入收尾状态,笔者对该模型中的收尾状态进行计算,发现这一类试题在命题中的错误或不严谨的地方。

关键词:电磁感应 线框 收尾速度

1 问题的提出

笔者在一次学习测验中,遇到这样一道电磁感应试题,题目如下。

【例1】如图1所示,相距为 d 的两条水平虚线 L_1 和 L_2 之间是方向水平向里的匀强磁场,磁感应强度为 B ,正方形线圈 $abcd$ 边长为 $L(L < d)$,质量为 m ,电阻为 R ,将线圈在磁场上方 h 高处静止释放, cd 边刚进入磁场时速度为 v_0 , cd 边刚离开磁场时速度也为 v_0 ,则线圈穿过磁场的过程中,从 cd 边刚进入磁场一直到 ab 边离开磁场为止()

- A. 感应电流所做的功为 $2mgd$
- B. 线圈的最小速度可能为 $\frac{mgR}{B^2L^2}$
- C. 线圈的最小速度一定是 $\sqrt{2g(h+L-d)}$
- D. 线圈穿出磁场的过程中,感应电流为逆时针方向

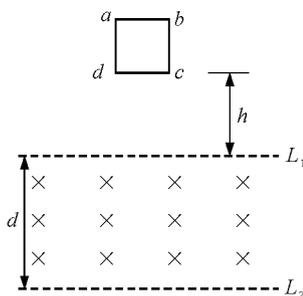


图1 例1题图

这道题的标准答案为A,B,C.对于选项B的分析,答案做了下面的解析.线框进入磁场可能先做减

速运动,在完全进入磁场前已做匀速运动,匀速运动的速度即为最小速度,由平衡条件可得

$$mg = \frac{B^2 L^2 v}{R}$$

解得

$$v = \frac{mgR}{B^2 L^2}$$

但笔者认为选项B有待商榷,下面我们来进一步地定量分析^[1].

2 进一步定量分析

假设正方形线框 cd 边刚进入磁场时速度为 v_0 ,时间为 $t_0=0$,线框 ab 边刚进入磁场时速度为 v_1 ,时间为 t_1 .

首先对正方形线圈 $abcd$ 的受力和运动状态进行分析.对于 $t_0 \sim t_1$ 这一段时间内的任一时刻 t_i ,线圈 cd 段切割磁感线,产生感应电动势 $\epsilon_i = BLv_i$,线圈中感应电流

$$I_i = \frac{\epsilon}{R} = \frac{BLv_i}{R}$$

因此 cd 边受到安培力

$$F_i = BI_i L = \frac{B^2 L^2 v_i}{R}$$

方向竖直向上,阻碍线框运动.

由题可知,正方形线圈在 $t_0 \sim t_1$ 这段时间内先做减速运动.由牛顿第二运动定律得

$$\frac{B^2 L^2 v}{R} - mg = -m \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

作者简介:吴泽楷(2003-),男,在读高中生.

指导老师:闫敬畏(1988-),男,本科,中教二级,主要从事中学物理教学及研究.

式(1)变形为

$$\frac{mR}{B^2L^2v - mgR} dv = -dt$$

对两侧同时积分,有

$$\int \frac{mR}{B^2L^2v - mgR} dv = \int -dt$$

解得

$$\frac{mR}{B^2L^2} \ln(B^2L^2v - mgR) = -t + C_1 \quad (2)$$

再整理,将式(2)改写成 v 关于 t 的函数

$$\ln(B^2L^2v - mgR) = \frac{B^2L^2}{mR} (C_1 - t) \quad (3)$$

式(3)求指数并变形得

$$v = \frac{mgR}{B^2L^2} + \frac{C_2}{B^2L^2} e^{-\frac{B^2L^2}{mR}t} = \frac{mgR}{B^2L^2} + C e^{-\frac{B^2L^2}{mR}t} \quad (4)$$

式(4)同样适用于 $t = t_0 = 0$, 这时

$$v = v_0 = \frac{mgR}{B^2L^2} + C e^{-\frac{B^2L^2}{mR} \times 0} = \frac{mgR}{B^2L^2} + C$$

解出

$$C = v_0 - \frac{mgR}{B^2L^2}$$

所以

$$v = \frac{mgR}{B^2L^2} + \left(v_0 - \frac{mgR}{B^2L^2} \right) e^{-\frac{B^2L^2}{mR}t} \quad (0 \leq t \leq t_1) \quad (5)$$

由式(5)发现速度将无限趋近于但大于 $\frac{mgR}{B^2L^2}$,

记这个速度为 v_m , 这个速度是一个有限的值。

接下来研究自变量 t 最大值 t_1 . 对 $0 \sim t_1$ 中的任一时刻 t_i , 都有

$$v_i \geq v_m$$

如果对 t_i 取一个微小增量 Δt , 记 $t_i \sim t_i + \Delta t$ 这段时间的位移为 x_i , 则有

$$\Delta t = \frac{x_i}{v_i} \leq \frac{x_i}{v_m}$$

对 $0 \sim t_1$ 这段时间中的每一个微小时间增量求和

$$\sum \Delta t \leq \sum \frac{x_i}{v_m} \quad (6)$$

式(6)左侧求和的结果就是 t_1 , 而右侧

$$\sum \frac{x_i}{v_m} = \frac{1}{v_m} \sum x_i = \frac{L}{v_m}$$

于是便得到

$$t_1 \leq \frac{L}{v_m} \quad (7)$$

式(7)的结果说明, 如果正方形线框边长有限, 则 t_1

有限, 因此 v 无法达到 $\frac{mgR}{B^2L^2}$, 于是选项 B 错误。

3 对该类试题命题的修正

如果非要按照标准答案进行选择的话, 只能认为这道题是道错题, 出题者没有考虑到进入收尾匀速状态的时间是无穷大, 而线框的边长有限, 因此线框进入磁场的时间为有限的定值, 故无法进入收尾状态. 像这样的错题还有很多, 如下面这道高考题。

【例2】如图2所示, 导线框 $abcdef$ 的质量为 m , 电阻为 r , ab 边长为 l_1 , cd 边长为 $\frac{l_1}{3}$, bc 和 de 边长均为 l_2 . ab 边正下方 h 处有一单边有界匀强磁场区域, 其水平边界为 PQ , 磁感应强度为 B , 方向垂直于纸面向里. 使线框从静止开始下落, 下落过程中 ab 边始终水平, 且 cd 边进入磁场前的某一时刻, 线框已开始匀速运动. 重力加速度为 g , 不计空气阻力。

(1) 求 cd 边进入磁场瞬间线框的加速度;

(2) 此后, 当 ef 边进入磁场前的某一时刻, 线框又开始匀速下落, 求从 cd 边刚进入磁场到线框完全进入磁场过程中, 线框损失的机械能。

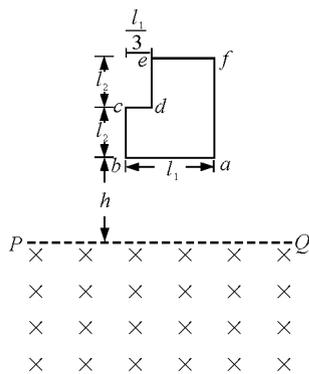


图2 例2题图

由前面的分析可知, 要实现该题题干中“ cd 边进入磁场前的某一时刻, 线框已开始匀速运动”的描述, 所需时间是无穷大. 该题因限制了运动距离, 进而限定了时间, 因此线框根本无法进入匀速状态. 如想在不改变题目情境和条件的情况下, 又能让试题不失严谨, 不妨在题干中强调“不考虑时间因素, 可认为线框已经进入匀速状态”。

参考文献

- 杨榕楠. 更高更妙的物理高考高分与自主招生决胜篇 [M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2013. 283