

毛细管法测量流体黏度理论分析*

刘战果 庞学霞 常晗硕 李常伟 赵志岗 段超予

(河北大学物理科学与技术学院 河北保定 071002)

(收稿日期:2019-11-07)

摘要:依据流体黏度的定义,基于不同理论基础对一种毛细管法测量流体黏度的简单装置进行了理论误差分析.发现牛顿力学相较流体力学在分析低速且速度梯度比较小的流体运动时,引入的理论误差比较小.基于两种理论都可以得到相同的毛细管法测量流体黏度的原理,理论分析和简化的过程融合了多领域知识,所得结果易被学生理解和掌握,可在实验实训过程中培养学生分析问题、解决问题的能力.

关键词:毛细管法 黏度 牛顿力学 流体力学

1 引言

黏性是流体的固有物理属性.流体流动时会在相邻流体层之间产生内摩擦力,此即流体的黏滞(性)力,亦称黏滞阻力.流体的黏度(又称黏滞系数)是描述流体内部摩擦性质的重要物理量,能够表征流体反抗形变的能力.流体分子间的引力和分子热运动是形成黏性的原因.

流体黏度的测量方法有落球(针)法、毛细管法、转筒法等,其中毛细管法适用于测量黏度较小的液体,例如水、酒精或者血液.毛细管法测量流体黏度是基于流体力学领域的泊肃叶公式,实际上,基于这种理论测量流体黏度进行了不同程度的近似^[1~6].本工作针对毛细管法测量流体黏度的一种简易装置,分析了基于不同理论的误差,其结果可以为任课教师讲授实验理论提供参考素材,也可以为学生在实验的过程中应用已学知识分析问题、解决问题提供参考.

2 黏度的定义及毛细管法测量黏度的简单装置

流体中两个移动边界之间的摩擦导致了流体剪切,描述这种层流剪切行为强度的物理量叫做流体的黏度或剪切黏度.黏滞力是流体受到剪切应力变形或拉伸应力时所产生的阻力.在一般的平行流动(即层流状态)中,剪切应力 τ 正比于速度 u 在垂直

于流动方向的 y' 轴的梯度^[1],即

$$\tau = -\eta \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1)$$

式中 η 即为黏度.式(1)假设流动是沿着平行线的层流状态,并且垂直于流动方向的 y' 轴指向最大剪切速度.如果能测量或者计算出层流状态中剪切应力 τ 和垂直于流动方向的速度梯度 $\frac{\partial u}{\partial y}$,则该流体的黏度 η 即可测出.

毛细管法是依据该黏度定义且能最容易实现测量流体(只适用于低黏度流体)黏度的方法之一,图1给出了一种毛细管法最简单的实验装置设计.

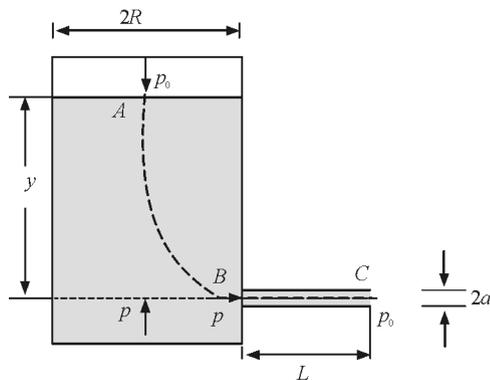


图1 毛细管法测量流体黏度实验装置示意图

如图1所示,圆柱形蓄水桶内直径为 $2R$,蓄水桶靠近底端处是一个长度为 L 、直径为 $2a$ 的毛细管,整套装置处于大气压 p_0 下.蓄水桶中盛有低黏度液体,液面到毛细管中心线的距离大约为 y ,毛细

* 河北大学创新创业训练计划项目,项目编号:2020217;河北大学第二批“课程思政改革试点课程”建设项目,项目编号:2020-KCSZ-02-055;河北省自然科学基金面上项目,项目编号:D2018201035

管另一端装有磁堵.当调节蓄水桶竖直,且蓄水桶中无气泡后,打开毛细管一端的磁堵,让蓄水桶的液面下降足够慢(准静态过程),使毛细管中的流动保持层流状态,此时从毛细管一端射出的液体应呈抛物线状且平稳,通过测量液面在不同时刻的高度,即可实现流体黏度测量.

图1显示的实验装置的设计思路简洁,操作简单、测量误差较小,是很多高校基础物理实验的首选.依据流体力学理论,液体在圆管内处于层流状态,如果圆管两端的压强差为 Δp ,则在圆管内达到定常流动之后的流量 Q 是

$$Q = \int_0^a 2\pi r v dr = \frac{\pi a^4 \Delta p}{8\eta L} \quad (2)$$

其中, v 是圆管内的速度分布函数, r 是以圆管中心为起点的径向坐标.由式(2)可以看出,要想测量流体的黏度首先要知道圆管两端的压强差 Δp .如图1所示,圆形毛细管与蓄水桶连接的一端的压强未知,可以用 p 表示;而另一端因与大气相连其压强应为大气压强 p_0 ,因此毛细管两端的压强差为 $\Delta p = p - p_0$.求解毛细管两端的压强差 Δp (或 p)可以从两种理论出发,即经典的牛顿力学理论和流体力学理论,得到的结果略有不同,下面就基于这两种理论,对毛细管两端的压强差 $\Delta p = p - p_0$ 进行分析.

3 基于牛顿力学理论分析毛细管两端压强差

对于连续的不可压缩、运动形式比较简单的流体,可近似看成质点组,如蓄水桶中的液体.当毛细管磁堵打开后,如果蓄水桶的内壁光滑且桶中的液面缓慢下降,对于低黏度液体的运动可以近似看成是落体运动(如图1所示),蓄水桶液面以上是大气压强 p_0 ,假设液体中的压强是各向同性的,与毛细管位置等高的液面压强为 p ,则依据牛顿运动定律可以给出变质量问题的力学公式

$$A_1(p_0 + \rho g y - p) = \frac{d}{dt}(m_1 v_1) = m_1 \frac{dv_1}{dt} + v_1 \frac{dm_1}{dt} = A_1 \gamma \rho \frac{dy}{dt} + v_1 \frac{dm_1}{dt} \quad (3)$$

其中, A_1 为蓄水桶截面积,考虑到蓄水桶半径为 R ,则 $A_1 = \pi R^2$. ρ 为液体密度, m_1 为蓄水桶中高于毛细管位置的液体质量, v_1 为蓄水桶中液体的下降速度(亦为液面下降速度 $= -\frac{dy}{dt}$),则

$$dm_1 = -\rho v_1 A_1 dt$$

$$\text{亦即} \quad \frac{dm_1}{dt} = -\rho v_1 A_1$$

因此式(3)变为

$$p - p_0 = \rho g y - \rho \gamma \frac{dy}{dt} + \rho v_1^2 \quad (4)$$

式(4)即等于用变质量牛顿力学得出的毛细管两端的压强差 Δp ,这个物理量包含了3部分.第一部分是高于毛细管位置的液体产生的静压强 $\Delta p_1 = \rho g y$ (g 为重力加速度),第二部分是蓄水桶中液体的运动变化产生的压强差 $\Delta p_2 = -\rho \gamma \frac{dy}{dt}$,第三部分是蓄水桶中液体质量流失带来的压强差 $\Delta p_3 = \rho v_1^2$.因为蓄水桶液面下降的速度及速度变化很小,可知后两项的贡献非常小.将式(4)代入式(2),可以得到一种计算流量的公式,即

$$Q = \frac{\pi a^4 \Delta p}{8\eta L} = \frac{\pi \rho a^4}{8\eta L} \left[g y + y \frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] \quad (5)$$

依据流量的定义,还可知道

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (6)$$

其中, A_2 (πa^2)是毛细管截面积, v_2 是毛细管中流体的平均流速.

为了求解未知量 y 或 v_1 ,联合式(5)和式(6),可以得到

$$\frac{\rho a^4}{8\eta L} \left[g y + y \frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] + R^2 \frac{dy}{dt} = 0 \quad (7)$$

显然,方程(7)无法给出解析解,也很难给出数值解.要想解决上述物理问题,必须对式(4)进行近似.考虑到蓄水桶中因液体的运动变化产生的压强 $-\rho \gamma \frac{dy}{dt}$ 和蓄水桶中液体质量流失带来的压强 ρv_1^2 都很小,可以认为 $\Delta p = \rho g y$,则方程(7)化简为

$$Q = \frac{\pi \rho g y a^4}{8\eta L} = -A_1 \frac{dy}{dt} = -\pi R^2 \frac{dy}{dt} \quad (8)$$

求解式(8)可以得到

$$y = y_0 \exp\left(-\frac{\rho g a^4}{8\eta L R^2} t\right) \quad (9)$$

其中, y_0 为初始时刻蓄水桶液面的净高度.测量一组不同时刻 t 对应的蓄水桶液面净高度 y 值,即可通过作图法拟合出待测流体的黏度 η .

对毛细管两端压强差 Δp 做近似是毛细管法测量流体黏度常用的处理方式^[1~6].为保证上述近似的可靠性,我们试比较式(4)中3种原因产生的压强

大小. 考虑到实验仪器设计的实用性, 选取毛细管长 $L=150.0\text{ mm}$, 毛细管内径约 $a=0.5\text{ mm}$, 蓄水桶内径 $R=37.00\text{ mm}$, 内置液体为纯净水. 如果初始时刻 ($t=0$) 蓄水桶液面的净高度 $y_0=40.00\text{ cm}$, 可查在 $20\text{ }^\circ\text{C}$ 时, 水的密度

$$\rho=0.9982\times 10^3\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$$

表1 式(4)中的3项压强差在不同实验时刻的大小及比例

t/s	$\Delta p_1/(\times 10^3\text{ Pa})$	$\Delta p_2/(\times 10^{-5}\text{ Pa})$	$\Delta p_3/(\times 10^{-5}\text{ Pa})$	$\frac{\Delta p_2+\Delta p_3}{\Delta p_1}/(\times 10^{-7}\%)$
0	3.914	2.191	2.191	11.2
60	3.828	2.096	2.096	11.0
600	3.134	1.405	1.405	9.0
1200	2.509	0.9007	0.9007	7.2
1800 ^①	2.009	0.5775	0.5775	5.7

①按照上述仪器设计参数, 如果液面每下降约 1.0 cm 标记一次时间, 测量约20组数据需要约 1741 s , 为了计算简便取整为 1800 s .

随着实验时间的增加, 这3种压强差都在减小, 被忽略的小量占大量的比重越来越小. 因此, 在 $20\text{ }^\circ\text{C}$ 时且在上述仪器设计参量情况下, 忽略蓄水桶中液体的运动变化产生的压强差和蓄水桶中液体质量流失带来的压强差不会给实验带来太大误差, 即使在其他温度下测量流体黏度也是如此.

4 基于流体力学理论分析毛细管两端压强差

简单的层流运动是流体力学描述的主要对象, 基于流体力学同样可以推导毛细管两端的压强差.

蓄水桶和毛细管中的流体运动简化成层流状态, 那就意味着也是无旋状态, 则对于理想、正压、有势质量力、无旋且不可压缩重流体情形的流体运动, 其运动方程适用于拉格朗日积分方程

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = f(t) \quad (10)$$

其中, φ 是速度势, $f(t)$ 是时间 t 的任意函数, 由边界条件决定, 对于某一固定时刻而言, $f(t)$ 在整个流场中取同一常数值. 式(10)具有能量守恒的形式, 是从能量的角度来描述流体的运动.

从蓄水桶的自由面 A 到毛细管入口 B 处, 再到毛细管出口 C , 画出一条流线 ABC , 在流线 AB 段, 因为蓄水桶截面相等, 所以大部分 v 近似相同, 则速度势

水的黏度

$$\eta=1.005\times 10^{-3}\text{ Pa}\cdot\text{s}$$

选取北京地区的重力加速度 $g=9.802\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. 我们计算了实验进行到不同的时刻, 3种压强差的大小以及将被忽略的小量压强差占大量压强差的比重, 计算结果如表1所示.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \int_0^x \frac{\partial v}{\partial t} dx = \frac{dv}{dt} \int_0^x dx = \frac{dv}{dt} x \quad (11)$$

其中, x 为从自由面 A 到流线上任一点的距离. 因此, 流线 AB 在两个标记点处有

$$\frac{dv_1}{dt} \cdot 0 + \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + gy = \frac{dv_2}{dt} s + \frac{v_2^2}{2} + \frac{p}{\rho} \quad (12)$$

其中, s 是流线 AB 段的长度. AB 段流线特定的长度很难计算, 但可推知其取值范围在 $(y, y+2R)$. 由式(12)可得

$$\Delta p = p - p_0 = \rho gy + \frac{\rho}{2} \left(1 - \frac{R^4}{a^4}\right) v_1^2 - \rho \frac{R^2}{a^2} \frac{dv_1}{dt} \quad (13)$$

式(13)得到的静压强差 Δp (等于上节用牛顿力学理论分析得到的压强差) 也包含了3部分. 第一部分是流线 AB 两端的净剩重力势能 $\Delta p'_1 = \rho gy$, 该项是静压强差的主要贡献部分. 第二部分是流线两端动能密度的变化量

$$\Delta p'_2 = \frac{\rho \left(1 - \frac{R^4}{a^4}\right) v_1^2}{2}$$

即在自由面处的动能密度 $\frac{\rho v_1^2}{2}$ 与在毛细管入口处的动能密度 $\frac{\rho v_2^2}{2}$ ($0 \approx \frac{\rho R^4 v_1^2}{2a^4}$) 之差. 第三部分是流线速度势的增量

$$\Delta p'_3 = \frac{-\rho d v_2}{dt} \left(\approx -\frac{\rho R^2}{a^2} \frac{d v_1}{dt} \right)$$

从蓄水桶液面下降的速度来看,第二部分和第三部分能量应该比较小.如果蓄水桶半径与毛细管半径之比 $\frac{R}{a}$ 很大,但流线两端动能密度的变化量比较小(相对于流线两端的净剩重力势能),同样可以对式(13)进行近似,并与式(2)结合,依然可以得到

表2 式(13)中的3项在不同实验时刻的大小及比例

t/s	$\Delta p'_1 / (\times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2})$	$\Delta p'_2 / (\times 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2})$	$\Delta p'_3 \text{ 平均} / (\times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2})$	$\frac{ \Delta p_2 + \Delta p_3 }{\Delta p_1} / \%$
0	3.914	-3.285	13.12	8.39
60	3.828	-3.142	12.57	8.20
600	3.134	-2.106	8.588	6.72
1 200	2.509	-1.351	5.647	5.38
1 800	2.009	-0.865 9	3.734	4.31

表2说明,在20℃时(其他温度下亦是如此)且在上述仪器设计参量情况下,忽略流线AB两端动能密度变化将给实验带来相对较大的误差,尤其是实验开始的前10 min将引入不小于6%的理论误差.这个误差似乎太大,而实际上依据流体力学理论,当流体运动达到定常状态时,毛细管与蓄水桶中的流速在径向方向上都是有限且有速度梯度的,在中心位置的流速最大,且与管道两端的正压差、管道半径的平方成正比,与管道长度、流体黏度成反比.而流体在管道中的平均流速是最大流速的一半,由此可得出定常状态下毛细管的平均流速与蓄水桶中的平均流速之比略小于 $\frac{R^2}{a^2}$.虽然流体未达到定常运动,但已经比较接近定常状态.此时准确计算 $v_2 : v_1$ 比较难,但由蓄水桶中的平均流速 v_1 与定常状态非常相近,而毛细管的平均流速 v_2 比定常平均流速小,可以推断出二者的比例系数比 $\frac{R^2}{a^2}$ 还要小.表2在计算(13)式中流线AB两端动能密度的变化量 $\Delta p'_2$ 时,为了简便就用 $\frac{R^2}{a^2}$ 近似代替 $v_2 : v_1$,从而造成计算得到的 $\Delta p'_2$ 偏高.因此,忽略流线AB两端动能密度变化给实验带来的误差不会像表2显示的那样高.

5 结束语

本文依据流体黏度的定义,对一种毛细管法测

式(8)和式(9).

参照上一节实验仪器的设计参量及实验环境,我们比较一下流线AB两端动能密度的变化量、流线速度势的增量与流线AB两端的净剩重力势能之间的大小,计算得到的不同实验时刻的大小及比例如表2所示.

量流体黏度的简单装置,基于不同理论基础进行了理论误差分析.发现牛顿力学在分析低速且速度梯度比较小的流体运动时,引入的理论误差比流体力学理论小.无论从哪种理论出发,都可以得到相同的测量流体黏度的理论公式,并且都表明实验过程中不能以打开磁堵的时刻为实验开始的计时点,应该等待从毛细管一端射出的水流呈抛物线状且平稳之后再开始计时,以最大限度地减小误差.

简化后的理论公式容易理解,能够很容易地得出方程的解析解,实现了多领域知识融合和综合运用,本文的分析过程和结果为学生融合多领域知识,养成分析和解决问题的习惯提供了参照.

参考文献

- 俞天伦,马世红.流体黏度的实验研究[J].物理实验,2014,34(12):1~5
- 陈代平,王远程,梁德富.Z-1型毛细管粘滞系数测量仪[J].工科大学物理,1992(2):34~35
- 刘继英.毛细管法测液体的粘滞系数[J].八一农学院学报,1994,17(4):90~91
- 田春山,马洪涛.液体粘滞系数测量法的改进[J].青海大学学报(自然科学版),2006,24(1):77~78
- 钱钧,惠王伟,张春玲,等.毛细管法测量液体黏度实验再设计[J].物理实验,2012,32(6):1~4
- 唐笑年,诸挥明,唐笑迪.毛细管法测流体黏度实验装置的设计与改进[J].大学物理实验,2018,31(6):25~27

(下转第69页)

5 结束语

基于 STEAM 教育理念的 3D 打印技术课程是物理科技活动课的新主题,把科学、技术、工程、艺术及数学相融合,通过项目式的学习和团队式的合作解决实际问题,有利于培养学生的创新思维和动手实践能力。

参考文献

1 许玄玄. 中小学 3D 打印课程设计与实践研究[J]. 中国教

育信息化,2019(08):21 ~ 24

2 刘晖. 基于项目的中小学创客课程开发与实施——以 Arduino+3D 打印创客课程为例[J]. 中国教育信息化,2019(04):30 ~ 33

3 郭威,薛耀锋,杨金朋. 基于 3D 打印的高中物理 STEM 课程设计与应用研究[J]. 中国教育信息化,2017(18):24 ~ 27

4 孙明西,乔保亚,张士伟. 新课程下物理科技教育活动初探[J]. 物理教师,2012,33(06):9 ~ 11

5 邵银,雷光娟. 基于创新思维导向的物理校本课程开发初探[J]. 物理教学,2017,39(06):37 ~ 39

Curriculum Design on Middle School Physical Science and Technology Activities Based on 3D Printing Technology

Wu Ruijia Cheng Minxi

(School of Physics and Telecommunication Engineering, South China Normal University, Guangzhou, Guangdong 510006)

Abstract: Based on STEAM education concept, this paper discusses the design of middle school physical science and technology activity curriculum based on 3D printing technology. Firstly it introduces the basic theory of 3D printing technology education, and analyzes the existing problems in the course design of 3D printing technology, this paper introduces the selection of 3D modeling software, and then designs a one semester physical science and technology activity course based on 3D printing technology for middle school, taking the production of 3D printing physical balance and lever principle model as an example. Finally, it shows the specific teaching examples of physical science and technology activity course of 3D printing technology in middle school.

Key words: 3D printing technology; middle school physics; science and technology activity course

(上接第 62 页)

Theoretical Analysis on Measuring Fluid Viscosity by Capillary Method

Liu Zhanguo Pang Xuexia Chang Hanshuo Li Changwei Zhao Zhigang Duan Chaoyu

(College of Physics Science and Technology, Hebei University, Baoding, Hebei 071002)

Abstract: According to the definition of fluid viscosity, this paper analyzes the theoretical error for a simple device measuring fluid viscosity by capillary method based on different theories. It is found that compared with hydrodynamics, the theoretical error introduced by Newtonian mechanics in the analysis of low-speed and small velocity gradient fluid motion is relatively small. Based on two kind of theories, the same principle of measuring the viscosity of fluid by capillary method can be obtained. The process of theoretical analysis and simplification integrates multi field knowledge. The results can be easily understood and mastered by students, which can provide reference for developing students' ability to analyze and solve problems in the process of experimental training.

Key words: capillary method; viscosity; Newtonian mechanics; hydrodynamics