

# GeoGebra 辅助运动学公式的图示法

魏 冲 王海锋

(石河子大学理学院 新疆 石河子 832000)

(收稿日期:2019-09-10)

**摘 要:**运用 GeoGebra 软件,辅助描绘了匀变速直线运动的位移与时间关系的公式和图形,展示了打点计时器实验中应用逐差法的分析方法,以及曲线运动中向心加速度的大小、方向的表达方法.生动直观地借用了物理图形来展示物理规律.

**关键词:**GeoGebra 运动学公式 向心加速度

## 1 GeoGebra 软件简介

GeoGebra 是一款数学工具软件,它集合了平面绘图、3D 绘图、动态几何、概率统计、代数运算、表格运算等多种功能. GeoGebra 可以画点、线段、直线、向量、多边形以及函数图像,并且能够改变他们的属性,既能呈现静态图像,又能呈现动态图像,这使得它能够制作物理、数学等教学课件,可用于展示在黑板上或 PPT 上难以展示的动态物理规律,非常适合用于教学演示,解决教学中的难点,体现物理教学思想.

## 2 匀变速直线运动位移公式的图示分析

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

上式为匀变速直线运动的位移公式,匀变速直线运动规律是学生认识自由落体运动、平抛运动,带电粒子在匀强电场中的类平抛运动等知识的基础. 人教版课本的位移与时间关系式的探讨采用以  $v-t$  图像推导位移公式体现物理学科的科学性与严谨性,并用无限分割再求和的方法使学生认识到匀变速直线运动的位移可以通过  $v-t$  图像求出,体验科学探究和微积分思想. 而传统课堂中采用黑板或者 PPT 等形式,都是以静态的  $v-t$  图像呈现这一探究过程,对于物理思维表象较差的学生,难以获得有效的认知. 因此,我们应用 GeoGebra 制作动态的  $v-t$  图像课件,以优化课堂教学.

### 2.1 课件制作

第一步,打开 GeoGebra,在绘图区增添横轴和

纵轴坐标的标签来建立  $v-t$  图像,在工具栏中选取文本工具,分别将横轴和纵轴的标签改为  $t$  和  $v$ . 第二步,在指令栏输入指令“如果( $0 \leq x \leq 60$ , 加速度  $a \times$  初速度  $v_0$ )”,得到形如一次函数的分段函数图像,其中调节滑动条加速度  $a$  和初速度  $v_0$  可以改变  $v-t$  图像中图线的斜率和纵截距,如图 1 所示.

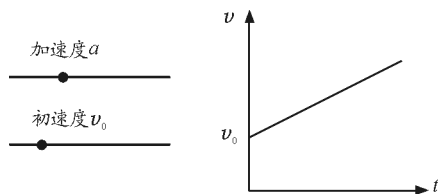


图 1  $v-t$  图

为体现微分思想,在指令栏输入指令“下和( $f$ ,  $0, 60, n$ )”,其中  $n$  为小矩形的数量,在工具栏利用布尔变量定义下和指令,并将布尔变量重命名为“矩形”. 如图 2 所示,其中“矩形”是否选中,可以改变小矩形的有无. 移动滑动条“ $n$ ”可改变小矩形的数量.

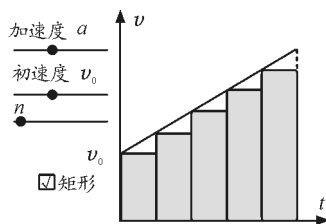


图 2 微分思想分析时选中“矩形”

### 2.2 教学设计

做匀速直线运动的物体在时间  $t$  内的位移  $x = vt$ . 在它的  $v-t$  图像中,着色的矩形边长正好是  $v$  和  $t$ ,矩形的面积正好是  $vt$ . 可见对于匀速直线运动,物

体的位移对应着  $v-t$  图像下面的面积. 我们操作上文制成的课件, 把加速度  $a$  调为零, 选中“矩形”并把  $n$  调为 1, 来表示匀速直线运动的物体的  $v-t$  图像, 如图 3 所示.

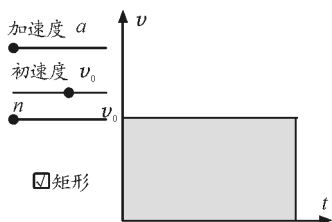


图 3  $a=0, n=1$  时  $v-t$  图

而做匀变速直线运动的物体, 在它的  $v-t$  图像中, 是一条倾斜直线, 它与横轴所围图形为梯形. 根据匀速直线运动的位移等于图线与横轴所围的面积, 我们能否用  $v-t$  图像与时间轴所围的面积表示匀变速直线运动的位移呢? 我们移动加速度  $a$  的滑动条, 适当增加图线的斜率. 此时观察到匀变速直线运动图线与横轴所围梯形的面积由一个着色矩形和一个白色三角形组成, 如图 4 所示.

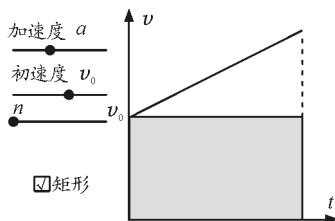


图 4  $n=1$  时匀加速直线运动的位移与面积关系分析

如果我们把矩形面积当做梯形面积, 即把匀变速直线运动的位移当成匀速直线运动的位移, 此时误差是很大的, 如果我们增加矩形数量,  $n$  取值为 2, 即把一段匀变速直线运动分割成两段匀速直线运动, 此时梯形被分成两个着色矩形和两个小三角形, 我们观察到两个矩形的面积之和与梯形面积的差值减小了, 如图 5 所示.

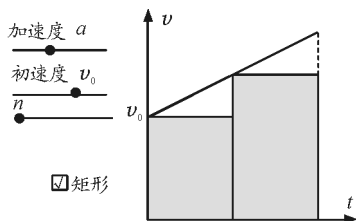


图 5  $n=2$  时匀加速直线运动的位移与面积关系分析

为了得到更精确的结果, 我们把一段匀变速直线运动分割成  $n$  段匀速直线运动, 此时我们可以得到此关系式:  $S_{\text{梯形}} = nS_{\text{矩形}}$

我们缓慢调节滑动条  $n$ , 使小矩形的数量缓慢增加, 在这一演示过程中, 学生可清楚地观察到梯形的面积逐渐被着色的  $n$  个小矩形填满, 白色的小三角形面积之和越来越小. 当  $n$  取值越大, 即小矩形数量越多, 梯形的面积越来越接近  $n$  个小矩形面积之和, 如图 6 所示.

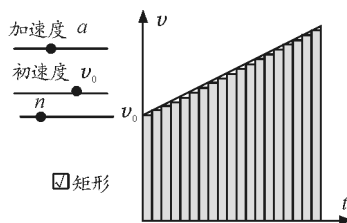


图 6  $n$  逐渐变大时, 梯形的面积越来越接近  $n$  个小矩形面积之和

而当  $n$  取值为正无穷时, 我们认为上述关系式  $S_{\text{梯形}} = nS_{\text{矩形}}$  成立. 所以匀变速直线运动等于无数段匀速直线运动, 梯形面积等于无数个小矩形面积之和, 而无数个小矩形面积表示无数个小位移, 无数个小矩形面积之和则表示总位移. 由此看来, 匀变速直线运动图像的梯形面积也表示物体运动过程的位移. 我们借助 GeoGebra 制作的课件, 生动地展示了微分求和思想, 弥补了学生物理表象思维不足的弱点.

通过微分求和思想, 我们得到匀变速直线运动图像与横轴所围的梯形面积就是物体的位移, 通过求面积, 我们就可以得到位移与时间的关系式. 通过图 7 我们可观察到这一梯形的面积可以根据几何公式“ $S_{\text{梯形}} = \frac{1}{2}(\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高}$ ”来求得. 得到位移的关系式

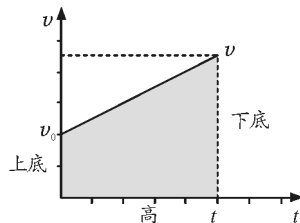


图 7 梯形的面积

$$x = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$

我们将  $v = v_0 + at$  带入

$$x = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$

最终可得到位移与时间的关系式

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

但是此方法需要学生进行代数,过程较为繁琐,不利于学生理解,因此我们采用数形结合的方法来直接通过图形求得位移与时间的关系式.如图8所示,矩形的长和宽分别为 $t$ 和 $v_0$ ,所以矩形面积为 $v_0 t$ .图线的斜率为 $a$ ,所以三角形的高为 $at$ ,三角形的底为 $t$ ,则三角形的面积为 $\frac{1}{2}at^2$ .图中梯形的面积 $x$ 等于矩形面积 $v_0 t$ 加上三角形面积 $\frac{1}{2}at^2$ ,即

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

由此我们可直接通过图像来求得位移与时间的关系式.

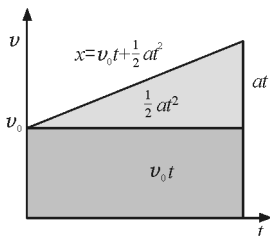


图8 数形结合求位移与时间的关系式

### 3 匀变速直线运动位移差公式的图示分析

#### 3.1 课件制作

修改 $x-y$ 坐标轴为 $v-t$ 坐标轴,输入指令:if( $0 \leq x \leq 50$ , 加速度 $a$  + 初速度 $v_0$ ).如图9所示得到分段函数,输入指令:下和( $f, 0, 50, n$ ).使梯形被分割成 $n$ 个矩形,如图10所示.

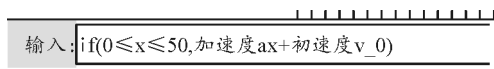


图9 if指令

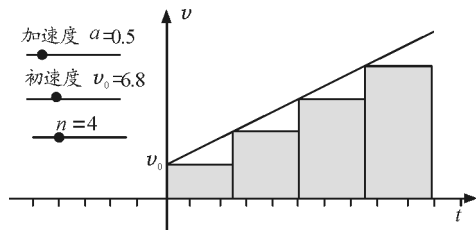


图10 图表说明

在指令栏分别输入指令: $A = (50 / n, \text{初速度 } v_0), B = (2 * 50 / n, \text{初速度 } v_0), C = (2 * 50 / n, \text{加速度 } a 50 / n + \text{初速度 } v_0), D = (50 / n, \text{加速度 } a 50 / n + \text{初速度 } v_0)$ .选取 $ABCD$ 4点为矩形,标注高为 $aT$ ,底为 $T$ ,面积则为 $aT^2$ ,标注为 $\Delta x$ ,如图11所示.

每个相邻梯形都可以表示为连续相等时间内的位移,而每个相邻梯形的面积之差都等于图中的矩形面积 $\Delta x$ ,而此矩形的高为 $aT$ ,底为 $T$ ,由此推出矩形面积 $\Delta x = aT^2$ ,即连续相等时间内的位移差相等.通过应用GeoGebra,我们得到了十分精确的图形,相对于传统的黑板粉笔画图,我们又增添了图像的可操作性,为解决相关物理问题提供了广泛的可能性.(如下文所示)

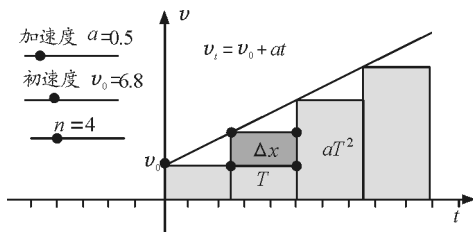


图11 指令说明

#### 3.2 课件在课本纸带类练习题中的应用

**【例1】**(人教版课本问题与练习)为研究实验小车沿斜面向下运动的规律,把打点计时器纸带的一端固定在小车上,小车拖动纸带运动时,纸带上打出的点如图12所示.

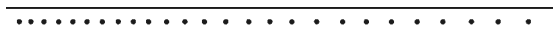


图12 一次实验的纸带

(1)某学生用以下方法绘制小车的 $v-t$ 图像.先把纸带每隔 $0.1\text{ s}$ 剪断,得到若干短纸条.再把这些纸条并排贴在一张纸上,使这些纸条下端对齐,作为时间坐标轴,标出时间.最后将纸条上端中心连起来,于是得到 $v-t$ 图像.请你按以上办法(用一张薄纸压在图12上,复制得到纸带)绘制这个图像.

(2)这样做有道理吗?说说你的看法.

依照题干要求,纸带相邻两点为 $0.02\text{ s}$ ,要分隔成5条纸带,上述课件中的 $n$ 取值为5,如图13所示.

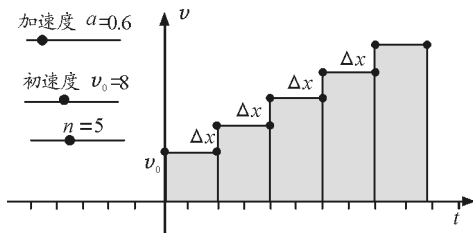


图13 图解

这5个矩形分别是依次排列的5段条形纸带,每段纸带的位移差在课件中用 $\Delta x$ 标注.由公式 $\Delta x = aT^2$ 可求出加速度 $a$ ,其中 $T=0.1\text{ s}$ , $\Delta x$ 通过直尺测

量,取平均值.

### 3.3 推导实验公式一般式 $x_m - x_n = (m - n)aT^2$

在传统的教学中,我们采用数学方法,列式来寻找规律,总结出一般式  $x_m - x_n = (m - n)aT^2$ . 但学生往往采用背诵的方法记忆结论,更难以达到有效运用. 因此,我们通过 GeoGebra 制作图像来帮助学生采用数形结合的思想来理解这一公式.

设  $x_n$  内的平均速度为  $v_n$ , 设  $x_m$  内的平均速度为  $v_m$ , 则有

$$x_n = v_n T \quad (1)$$

$$x_m = v_m T \quad (2)$$

(2) - (1) 得

$$x_m - x_n = (v_m - v_n)T \quad (3)$$

由图 14 可知

$$v_m - v_n = a(m - n)T \quad (4)$$

将式(4)代入式(3)得

$$x_m - x_n = (m - n)aT^2 \quad (5)$$

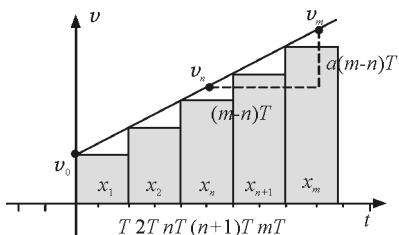


图 14 数形结合理解一般式

借助 GeoGebra 描绘的图像,学生能够在推导出公式的基础上,进一步在各类题型中应用这一公式,并结合图像理解其物理规律.

### 3.4 逐差法求纸带问题

对于打点计时器题型中求纸带中隐含的加速度问题,学生往往通过背公式的方法解题,这样不但不利于学生解题,反而容易导致学生思维僵化,更不利于以后的学习. 在传统教学中我们往往采用下列方法进行教学.

根据公式  $x_m - x_n = (m - n)aT^2$  有

$$x_4 - x_1 = 3aT^2 \quad (6)$$

$$x_5 - x_2 = 3aT^2 \quad (7)$$

$$x_6 - x_3 = 3aT^2 \quad (8)$$

由式(6) + (7) + (8) 得

$$a = \frac{(x_6 + x_5 + x_4) - (x_3 + x_2 + x_1)}{9T^2} \quad (9)$$

在 7 点纸带题型中可以直接使用式(9),但对于学生而言,  $\Delta x = aT^2$  这一公式更容易记忆与理解.

【例 2】(2016 年天津理综改编) 求下列 7 点纸带中的加速度  $a$ , 如图 15 所示.

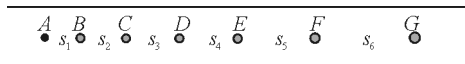


图 15 例 2 题图

此题可直接使用式(9)

$$a = \frac{(s_6 + s_5 + s_4) - (s_3 + s_2 + s_1)}{(3T)^2}$$

即可求出加速度  $a$ . 但是学生只是套用了这一公式, 并没有有效完成探究的过程, 不利于学生的物理思维发展. 于是我们可利用 GeoGebra 制作的课件帮助学生理解逐差法求加速度的解题过程, 来避免学生采用死记硬背的方法解决物理问题.

我们不妨用 GeoGebra 把纸带模型进行“放大”, 来直接使用  $\Delta x = aT^2$  来解题, 如图 16 所示.

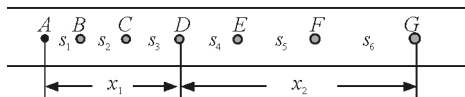


图 16 GeoGebra 改编图

通过使用 GeoGebra 改编, 使 7 点纸带简化成了 3 点纸带. 可由公式  $\Delta x = aT^2$  直接求得

$$a = \frac{x_2 - x_1}{(3T)^2}$$

注: 两点的时间由  $T$  扩大为  $3T$ .

再如图 17 所示, 使 5 点纸带简化为了 3 点纸带.

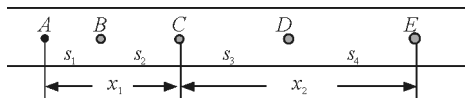


图 17 5 点纸带简化图

逐差法求加速度

$$a = \frac{(s_4 + s_3) - (s_2 + s_1)}{(2T)^2}$$

简化为  $a = \frac{x_2 - x_1}{(2T)^2}$  (注: 两点的时间由  $T$  扩大为  $2T$ ).

通过观察 GeoGebra 制作的课件, 我们注意到多点的纸带, 即使是 9 点, 11 点及更多点, 都可以选取中点, 把纸带“切”分为  $x_1$  和  $x_2$  两大段, 再通过  $\Delta x = aT^2$  即可求出加速度. (注: 此时两点时间  $T$  不是原来两点的时间, 而是新的两个点的时间) 有利于学生记忆和理解.

## 4 匀速圆周运动向心加速度表达式的图示分析

人教版必修 2 中, 在“做一做”中以文本图像的

形式“探究”了向心加速度大小的表达式,而通过借助 GeoGebra 制作的课件,能够更形象生动地探究向心加速度的大小以及方向。

#### 4.1 向心加速度课件制作

首先,在输入栏输入:Circle( $O, r$ ),由此建立圆周  $c$  和参数  $r$ ,在圆周  $c$  上取两点  $A, B$ ,并以这两点做圆的切线  $t_A, t_B$ .在指令栏中用 slope 得出这两条切线的斜率  $k_A, k_B$ ,再用  $\theta = \text{atand}(k)$  指令求出两条切线的倾斜角  $\theta_A, \theta_B$ .为了建立向量以表示速度,选取切线的速度方向的一点  $A'$ .在指令栏输入: $A * *' = \text{if}(y(A) \geq y(O), A - v\_1 (\cos(\theta\_A), \sin(\theta\_A)), A + v\_1 (\cos(\theta\_A), \sin(\theta\_A)))$ ,求出点  $A'$ ,同理求出  $B'$ .用 Vector 指令,建立从  $A$  到  $A'$  的向量以表示速度  $v_A$ ,同理建立速度  $v_B$ .把  $v_A$  的起点平移到  $B$  点,得到  $v'_A$ ,依次连接  $v'_A$  与  $v_B$  的末端,从而得到向量  $\Delta v$  以表示速度的变化量,此时已完成课本中的图像。

为了方便探究向心加速度的大小,连接  $v'_A, v_B$  与  $\Delta v$ ,得到矢量三角形;同理连接  $O, A, B$  3 点得  $\triangle OAB$ .在指令栏输入 Angle 指令,标注两个三角形的角度.通过显示的角度,证明了两个三角形是相似三角形,如图 18 所示。

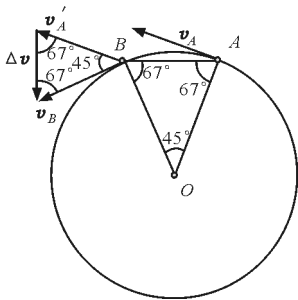


图 18 两个三角形相似

#### 4.2 向心加速度的大小

根据相似三角形可得

$$\frac{\Delta v}{\Delta l} = \frac{v}{r}$$

$\Delta l$  为圆上  $A, B$  两点构成的弦,  $v$  代表速度  $v_A, v_B$  的大小。

当时间  $\Delta t \rightarrow 0$  时,弦  $\Delta l$  近似等于弧长  $v \Delta t$ ,通过等量代换得

$$\frac{\Delta v}{v \Delta t} = \frac{v}{r}$$

整理得

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

根据定义式  $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ .

得

$$a = \frac{v^2}{r}$$

由此得到向心加速度大小表达式。

#### 4.3 向心加速度的方向

取弦  $AB$  中点为起点,  $O$  点为终点,建立向量。观察到这一向量始终与向量  $\Delta v$  同向,即  $\Delta v$  的方向始终指向圆心,也证明了向心加速度  $a$  的方向始终指向圆心,如图 19 所示。

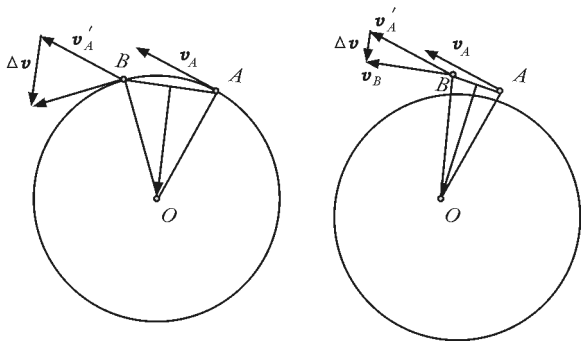


图 19 向心加速度的方向

### 5 总结与感悟

通过应用 GeoGebra,展示了高中物理运动学中公式分析的图示法所需要的可操作式课件制作过程,辅助描绘了位移与时间的关系式  $x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$  的图像,可使学生从  $v-t$  图像中理解匀加速直线运动中加速度存在的影响.制作了推导实验公式  $\Delta x = a T^2$  及一般式  $x_m - x_n = (m - n) a T^2$  的课件,用此课件对人教版课本课后习题进行了应用;对典型 7 点纸带以及其余多点纸带问题进行了一分为二式的化简,帮助学生理解记忆.根据人教版“做一做”栏目制作了推导向心加速度大小和判断方向的课件,融入了数形结合的思想. GeoGebra 与物理课堂教学相结合,能够有效帮助学生克服学习中的重难点,提高教师在物理课堂教学的效率。

#### 参考文献

- 1 艾亮. GeoGebra 在高中物理教学中的应用[J]. 物理通报, 2018(07): 99 ~ 101, 107
- 2 盛宝骥. 用 GeoGebra 软件描绘电荷电势分布[J]. 物理教师, 2018, 39(01): 71 ~ 73
- 3 黄北京, 刘毓球. 用 GeoGebra 辅助高中物理微元思想的教学[J]. 物理教师, 2013, 34(04): 58 ~ 59