

水透镜的变焦原理研究

唐建国

(苏州市胥江实验中学校 江苏 苏州 215004)

(收稿日期:2021-01-26)

摘要:探讨了水透镜的变焦原理,在忽略水的重力影响的情况下,认为水透镜是由两个对称球缺组成的薄透镜.在这个理想模型下,研究了水的体积、透镜的曲率半径和透镜焦距之间的关系,得到了一个水透镜焦距关于水的体积的隐函数,并利用 Mathematica 进行了数值计算,计算结果与实验测量结果符合得较好.

关键词:水透镜 球缺 焦距 共轭法 Mathematica

可变焦水透镜,由一层薄膜包裹一定体积的水组成,可以通过注射器注入或抽取透镜内液体,从而改变球面透镜的曲率半径,达到变焦的效果,如图1所示.水透镜在初中物理教学中,通常用来演示人眼晶状体凸度的调节,模拟近视眼和远视眼的成因原理,能较好地解决相关教学难点.然而,对于水透镜焦距的改变,教师大多给出一个定性的解释,即“水透镜注入的水越多,形状上就越凸(曲率半径越小),焦距就越小”,那这几个相关物理量之间究竟满足怎样的定量关系?本文对此进行了研究.



图1 水透镜

1 水透镜的理论模型建立

当往薄膜内注入水时,薄膜向外凸出,形成水凸透镜.忽略水的重力影响,水透镜可近似当作是由两个对称的“球缺”组成,如图2(a)所示.设水透镜的曲率半径为 R ,水透镜孔径的半径为 r ,球缺的高度为 h ,如图2(b)所示.

单个球缺的体积可用积分的方法求出^[1],整个水透镜的体积 V 就是两个对称球缺体积之和

$$V = 2 \int_{R-h}^R \pi x^2(y) dy = 2\pi \int_{R-h}^R (R^2 - y^2) dy =$$

$$2\pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) \quad (1)$$

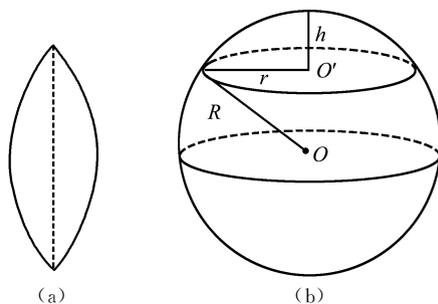


图2 透镜的球缺模型

根据图2(b)的几何关系得出

$$h = R - \sqrt{R^2 - r^2}$$

代入式(1),得到水透镜体积计算公式为

$$V = 2\pi \left(R - \sqrt{R^2 - r^2} \right)^2 \cdot \left(R - \frac{R - \sqrt{R^2 - r^2}}{3} \right) \quad (2)$$

由于水透镜的厚度比其球面的曲率半径小很多,因此可将水透镜视作薄透镜模型考虑.对于在空气中的薄透镜,焦距 f 与曲率半径 R 和透镜材料的折射率 n 满足如下关系^[2]

$$f = \frac{R}{2(n-1)}$$

代入式(2),得

$$V = 2\pi \left[2f(n-1) - \sqrt{4f^2(n-1)^2 - r^2} \right]^2 \cdot \left[2f(n-1) - \frac{2f(n-1) - \sqrt{4f^2(n-1)^2 - r^2}}{3} \right] = \frac{32\pi}{3} f^3 (n-1)^3 - \frac{16\pi}{3} f^2 (n-1)^2 \cdot \sqrt{4f^2(n-1)^2 - r^2} - \frac{2\pi}{3} \sqrt{4f^2(n-1)^2 - r^2} \quad (3)$$

当 r 和 n 取相应的数值之后,式(3)就是一个水透镜的焦距 f 关于其体积 V 的隐函数.

2 水透镜焦距的测量方法

采用共轭法测量水透镜在不同体积下的焦距,如图3所示.固定光源和光屏之间的距离 L 不变, L 须大于所测水透镜的4倍焦距.将水透镜放在光源和光屏之间,在前后移动水透镜的位置过程中,水透镜有两个位置能够使光源成像在光屏上,一个是倒立放大的实像,另一个是倒立缩小的实像,记录这两个位置的距离为 d .根据薄透镜成像条件

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f} \quad (4)$$

根据几何条件

$$u - v = d \quad u + v = L$$

代入式(4),整理可得

$$f = \frac{L^2 - d^2}{4L} \quad (5)$$

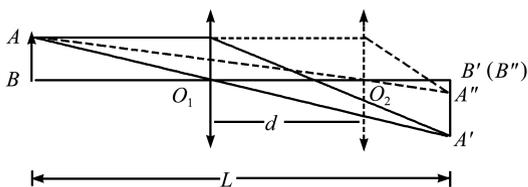


图3 共轭法测焦距实验原理图

根据式(5),只需测定 L 和 d ,就能把焦距测出,即为共轭法测焦距.这种测量方法不需要考虑透镜的厚度,相比于利用式(4)来测量焦距,避免了在测量 u 和 v 时引入的较大误差,所以测量结果更加准确.

3 实验测量与理论计算

所选用的水透镜的孔径半径 $r = 18$ mm,水透镜充入一定体积的水.在测量过程中,保持光源和光屏的距离 $L = 800$ mm 不变,记录不同水透镜体积 V 情况下成倒立放大实像和倒立缩小实像时,水透镜所在位置分别对应的刻度 d_1 和 d_2 ,两个刻度的差值即为 d ,将 L 和 d 代入式(5),可得出水透镜焦距 f ,记录如表1所示.将不同水透镜体积下的焦距绘制入图4,用圆点表示.

表1 水透镜焦距测量记录表

V/mm^3	d_1/mm	d_2/mm	d/mm	f/mm
2 000	170.4	603.5	433.1	141.4
3 000	101.2	685.8	584.6	93.2

续表 1

V/mm^3	d_1/mm	d_2/mm	d/mm	f/mm
4 000	82.9	726.6	643.7	70.5
5 000	65.7	742.4	676.7	56.9
6 000	60.5	748.4	687.9	52.1
7 000	54.1	752.9	698.8	47.4
8 000	51.0	755.3	704.3	45.0

将水透镜孔径半径 $r = 18$ mm,纯水的折射率 $n = 1.333$ 代入式(3),利用 Mathematica 数学软件绘制水透镜的焦距 f 和所含水体积 V 之间的函数关系图像,如图4中光滑曲线所示.

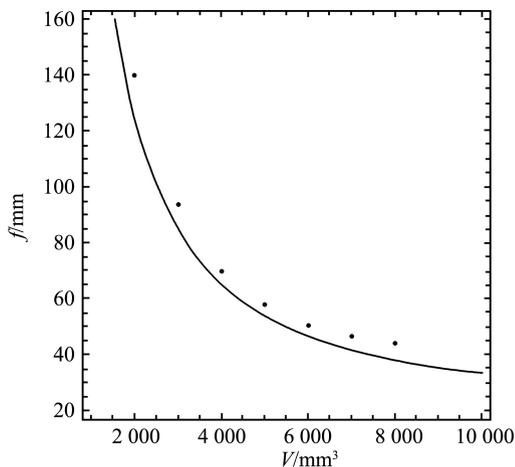


图4 水透镜的焦距与含水体积的关系图

4 总结

实验测量和理论计算的结果对比后,可以得到如下结论:(1)实验测量结果与理论模型计算基本符合,证实了所建立的理论模型可以较好地解释水透镜变焦原理.(2)理论和实验都表明,水的体积只在一定范围内变化时,水透镜才具有较好的变焦能力.(3)水透镜内水的体积不宜充入太多,一方面,水透镜的变焦能力随体积的增大而变弱;另一方面,水的体积越大,水的重力会使水透镜的形状越来越趋近于水滴形,导致水透镜的主光轴不稳定.(4)若将充入透镜的液体介质改成折射率更大密度较小的油,油透镜是否会比水透镜具备更好的调焦能力?这个问题值得进一步研究.

参考文献

- 1 同济大学应用数学系.高等数学上册(第5版)[M].北京:高等教育出版社,2002.273~276
- 2 赵凯华.新概念物理教程·光学[M].北京:高等教育出版社,2004.46~48