质心动能定理与相对动能定理

汤幼强

（南昌县莲塘第一中学　江西 南昌　330200）

黄亦斌

（江西师范大学物理与通信电子学院　江西 南昌　330022）

（收稿日期：2021－01－27）

摘　要：系统地梳理了质点系的多种动能定理，包括（总）动能定理、质心动能定理和相对动能定理，并以质点系角动量定理的分解作为对比．然后，对一道柔链题进行了讨论．

关键词：柯尼希定理　质心动能定理　相对动能定理

1　理论

质点系的动能定理其实不止一种，正如质点系角动量定理可以对静点，亦可对质心，不止一种一样．我们先来梳理一下质点系动力学．

对于一个一般的质点系，可以对其中每个质点列出质点动力学方程（动能定理、动量定理和角动量定理），其中每个方程的左边涉及到力（包括内力和外力），而右边则涉及对运动的描述（动能、动量和角动量）．将这些方程相加，左边就是内力和外力的贡献，右边则出现系统的总动能、总动量或总角动量．

下面是牛顿第三定律上场．这个定律似乎存在感不强，其实相当重要．正是由于这个定律，使得一对内力的冲量之和为零，力矩之和为零．这就使得质点系的动量定理和角动量定理的左边不出现内力，只有外力．多大的简化！遗憾的是，一对内力的做功问题要复杂．由牛顿第三定律，一对内力做功之和不一定为零，但也简单到仅依赖于两相互作用质点的距离变化．于是有质点系动能定理：外力功和内力功之和等于系统动能的变化

$$\sum_{i<j}\boldsymbol{f}_{ij}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{ji}+\sum_{i}\boldsymbol{F}_{i}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{i}=\mathrm{d}\left(\sum_{i}\frac{1}{2}m_{i}v_{i}^{2}\right) \tag{1}$$

$$\text{đ}A_{\text{内}}+\text{đ}A_{\text{外}}=\mathrm{d}K$$

其中内力功 $\text{đ}A_{\text{内}}$ 是成对的．对于保守系统，力做功

设置提交作业的时间节点能提高个人自律性，大家成绩也明显提高．不足在于，有的学生不能完全接受，比如线上平台查阅例题详解需要流量，不太方便，当面问老师更好，造成学习内容的点击率不高．其实，平台传递内容的有效期长，可以反复观看，利还是大于弊的．

5　结束语

通过一个学期的教学实践，回顾教学过程，分析教学效果，笔者认为在今后的物理教学中合理使用混合式教学方法，势在必行！

参 考 文 献

1　陈杰，黄鑫，贾辉．基于微课和翻转课堂的大学物理基础性实验教学研究[J]．物理与工程，2018，28(3)：109～111

2　郑凯，赵红敏，蔡天芳．互联网＋时代下的大学物理混合式教学改革[J]．物理与工程，2018，28(S1)：189

3　迟卓君，梁法库，李景尧，等．基于 SPOC 的大学物理课程混合式教学探究[J]．高师理科学刊，2018，38(12)：84～86

4　王祖源，张睿，顾牡，等．基于 SPOC 的大学物理课程混合式教学设计与实践[J]．物理与工程，2018，28(4)：3～19

5　肖立勇，尹跃．基于混合式教学模式下的大学物理实验教学改革和应用[J]．物理通报，2020(4)：84～88

6　张睿，王祖源，徐小凤．混合型教学模式对物理学习态度的影响[J]．物理与工程，2017，27(3)：3～6

7　教育部．国家中长期教育改革和发展规划纲要（2010—2020）[EDB/OL]．(2010－07－29)[2016－11－28]．http://old. moe. gov. cn/pubIicfiles/business/htmlfiles/moe/info_list/201407/xxgk_171904.html

等于势能的减少，于是可以得到机械能守恒定律.

接下来，我们进入力学量的分解. 对任意质点系都可以定义质心，注意这里没有任何前提条件. 质心是质点系的平均位置，是各质点以质量为权的加权平均位置

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{M} \qquad M = \sum_i m_i \tag{2}$$

由此自然引申出质点系的平均速度 —— 质心速度和质点系的平均加速度 —— 质心加速度

$$\boldsymbol{v}_C = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i}{M} \qquad \boldsymbol{a}_C = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{a}_i}{M} \tag{3}$$

显然，质心运动代表着质点系的整体运动. 此外，每个质点还存在对质心的相对运动

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}'_i \quad \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}'_i \quad \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}'_i \tag{4}$$

质心运动和相对运动有时又称为外部运动和内部运动，在刚体情况下也称为平动和转动，或公转（轨道运动）和自转（自旋运动）.

我们知道，对于一般的质点系，利用速度分解式(4)，可以得到动能分解的柯尼希定理

$$\begin{gathered}\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} M v_C^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \\ K = K_C + K'\end{gathered} \tag{5}$$

恰好是式(1) 右边的分解，其中右边两项分别是质心动能和相对动能，在刚体情形又分别叫做平动动能和转动动能. 左边是不是也可以分解呢？定义了质心后，质点系动量定理等价于质点系质心运动定理

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = M \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t} \tag{6}$$

其中左边只有外力，没有内力. 将上式两边点乘质心位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C$，可得到

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_C = M \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_C = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2} M v_C^2\right) \tag{7}$$

此式右边是质心动能的增量，故这就是质心动能定理. 在这个定理中，内力根本不出现，而各外力所点乘的位移并不是式(1) 中各自受力点的位移，而是统一为质心位移. 式(1) 中左边的外力功又可依式(4) 变为

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_C + \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}'_i \tag{8}$$

此式可理解为外力功的分解. 联立式(1)、(5) 和(7)，马上得到相对动能定理

$$\sum_{i<j} \boldsymbol{f}_{ij} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}'_{ji} + \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}'_i = \mathrm{d}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2\right) \tag{9}$$

其中外力点乘的位移是各自受力点相对于质心的位移，而内力功部分的位移仍为两质点间的相对位移：$\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_{ji} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{ji}$. 相对位移与惯性系还是质心系无关.

以上内容可以总结如下

$$\begin{array}{ccccc} \sum_{i<j} \boldsymbol{f}_{ij} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{ji} & + & \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i & = & \mathrm{d}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2\right) \\ \| & & \| & & \| \\ 0 & + & \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_C & = & \mathrm{d}\left(\frac{1}{2} M v_C^2\right) \\ + & & + & & + \\ \sum_{i<j} \boldsymbol{f}_{ij} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}'_{ji} & + & \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}'_i & = & \mathrm{d}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2\right) \end{array} \tag{10}$$

其中，3 个横式分别为质点系的（总）动能定理、质心动能（平动动能）定理和相对动能（转动动能）定理，3 个竖式分别为内力功、外力功和动能的分解式. 可以看出，每个外力功可分解为质心运动部分和相对运动部分，而内力功则只有相对部分，这是因为内力不会影响质心速度和整体运动.

作为对比，我们看看对角动量定理的分解. 对静点的质点系角动量定理为

$$\sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i\right) \tag{11}$$

其中，右边存在角动量分解（类似于动能的柯尼希定理）

$$\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{r}_C \times M \boldsymbol{v}_C + \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{v}'_i \tag{12}$$

两项分别为质心角动量（将整个系统的质量集中于质心后对静点的角动量）和相对（于质心的）角动量. 而左边的合力矩可依式(4) 分解为

$$\boldsymbol{M} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{r}_C \times \sum_i \boldsymbol{F}_i + \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{F}_i \tag{13}$$

式(12)、(13) 中，左边是对应的[见式(11)]，右边第二项也是对应的（即对质心的角动量定理），故有如下表示

$$\begin{array}{ccc} \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i & = & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i\right) \\ \| & & \| \\ \boldsymbol{r}_C \times \sum_i \boldsymbol{F}_i & = & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}_C \times M \boldsymbol{v}_C) \\ + & & + \\ \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{F}_i & = & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i \boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{v}'_i\right) \end{array} \tag{14}$$

其中，3 个横式分别为质点系的（总）角动量定理、质

心角动量(轨道角动量)定理和相对角动量(自转角动量)定理,两个竖式分别为力矩和角动量的分解式.与式(10)不同的是,此处没有内力项.

2　例题

以常见的一道柔链题为例[1] 进行分析.题目如下:

一柔链条长为 L,单位长度的质量为 λ,链条放在有一小孔的桌面上,一端由小孔稍伸下来,其余部分堆在小孔周围,如图 1 所示.由于某种扰动,链条因自身重量开始下落.求链条下落速度与落下距离之间的关系.所有摩擦不计.

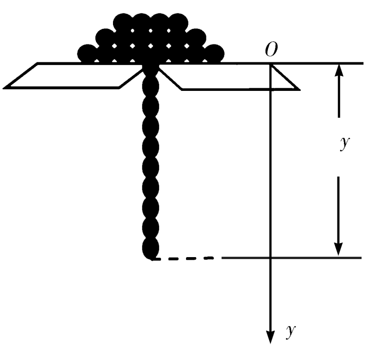

图 1　柔链放置图

可以看出,由于存在完全非弹性碰撞(上部的静止链条被下部的运动链条突然拉扯),此系统机械能不守恒.文献[1] 给出多种方法,此处用质心动能定理求解.

质心动能定理中的功是"质心功",有两个要素:一是只有外力,没有内力;二是位移只是质心位移.此题中的外力是支持力和重力,其中支持力做(总)功为零,但其质心功为负(质心下移);重力当然包括上部的重力和下部的重力,然后还要乘以(整个系统的)质心位移,故都做正功.

此题的关键是要确认:系统所受外力之和等于下部的重力.考虑一微元过程:上部相接处的一小段链条被下部拖动.此过程中,该小段与上部之间并无相互作用,只存在该小段与下部之间的拉扯,故上部所受的支持力除了抵消上部的重力外无额外的部分.于是,支持力与上部重力之和为零,二者的质心功之和为零,只剩下下部重力的质心功 —— 下部重力($\lambda y g$)乘以整个系统质心的位移($\mathrm{d}y_C$).于是,根据质心动能定理,有

$$\lambda y g\,\mathrm{d}y_C = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\lambda L v_C^2\right) \tag{15}$$

容易计算出

$$y_C = \frac{y^2}{2L} \quad \mathrm{d}y_C = \frac{y\mathrm{d}y}{L} \quad v_C = \frac{\mathrm{d}y_C}{\mathrm{d}t} = \frac{y}{L}\dot{y}$$

代入式(15),化简即得

$$2gy^2\mathrm{d}y = \mathrm{d}(y^2\ \dot{y}^2)$$

考虑初始条件 $t=0$ 时,$y=0$,$\dot{y}=0$,即得

$$\dot{y} = \sqrt{\frac{2}{3}gy}$$

文献[1] 对此题进行了详尽的分析,给出多种解法以及一些概念辨析.可以看出,本文上述解法实质上就是文献[1] 的解法三,只不过该解法在那里被误判了.

参 考 文 献

1　王俊玲,王洋,李转,等.整体法对一道柔链题的全方位解答[J].物理与工程,2019(S1):15 ~ 17

Barycentric Kinetic Energy Theorem and Relative Kinetic Energy Theorem

Tang Youqiang

(Liantang No.1 Middle School of Jiangxi Province, Nangchang, Jiangxi　330200)

Huang Yibin

(School of Physics, Communication and Electronics, Jiangxi Normal University, Nanchang, Jiangxi　330022)

Abstract: Multiple kinetic energy theorems are clarified systematically, including (total) kinetic energy theorem, barycentric kinetic energy theorem and relative kinetic energy theorem. One solution to a chain-problem is also discussed.

Key words: Konig′s theorem; barycentric kinetic energy theorem; relative kinetic energy theorem