

关于小角度极限下卢瑟福散射公式有效性的讨论*

黄开智

(华中师范大学物理科学与技术学院 湖北 武汉 430079;

江苏省姜堰第二中学 江苏 泰州 225500)

乔翠兰

(华中师范大学物理科学与技术学院 湖北 武汉 430079)

申晨

(华中师范大学人工智能教育学部 湖北 武汉 430079)

(收稿日期:2021-02-14)

摘要:卢瑟福散射公式在大角度散射时其理论值与实验值吻合得很好,但在小角度散射时,却发现卢瑟福散射公式已经失效.一些研究者对此问题给出了不同的回答,其中认为忽略核外电子屏蔽效应是主要的原因.通过相关理论推算、建立模型以及数据验证,给出了一种回答,即卢瑟福散射公式在小角度散射时失效的主要原因是入射粒子单次散射的假设不成立.

关键词:卢瑟福散射公式 有效性 小角散射 屏蔽效应 单次散射

许多教材在推导卢瑟福散射公式时(包括库仑散射公式)都做了一些假设,如只发生单次散射、核外电子的屏蔽作用可以忽略以及靶核静止等,从而在理论上得到了卢瑟福散射公式.但在实际操作中,却又发现不少实验结果与理论预测不相符,如本文所讨论的小角度散射,此时,卢瑟福公式会失效.对于这一问题,相关文献是如此表述的:“当瞄准距离 b 达到原子大小时,由于原子呈电中性,库仑散射就根本不会发生.因此,在小角时,不考虑核外电子屏蔽效应的卢瑟福公式不再正确.”^[1,2]

本文通过理论推算和相关实验数据,发现在小角度散射时,卢瑟福公式失效的主要因素不是屏蔽效应,而主要是单次散射的假设不成立.

1 理论推算

1.1 卢瑟福散射公式

卢瑟福散射公式为

$$dN = Nnt \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (1)$$

上式 dN 表示进入 $d\Omega$ 立体角接收器的 α 粒子数, N 表示入射 α 粒子总数, n 表示靶内原子数密度, t 表示靶的厚度, E 表示入射粒子的能量, Z_1 和 Z_2 分别

表示 α 粒子和靶核的核电荷数, θ 为散射角, e 为电子电荷量.

将式(1)对 θ 作图,得图1中实线A,由实线A可知,当 $\theta \rightarrow 0$ 时, $dN \rightarrow \infty$,这显然违背了 $N(N > dN)$ 是有限值的前提.因此在 $\theta \rightarrow 0$ 时,曲线应该有一个有限值,如此,对于散射角 θ 而言,应该有一个下限 θ_0 .与之相对应,反映在图中应是虚线B的情形.这样,当对式(1)在散射全空间积分时,才会有 $\int dN = N$ 成立.

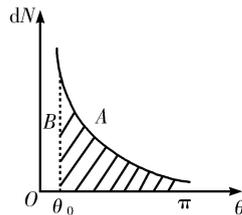


图1 卢瑟福散射公式函数图像

1.2 θ_0 的确定

在忽略核外电子对核库仑场的屏蔽效应时,两个核的散射过程就是一个纯粹的库仑散射过程,由此得到库仑散射公式

$$b = \frac{a}{2} \cot \frac{\theta}{2} \quad (2)$$

* 国家自然科学基金联合基金项目资助,项目编号:U1731243

作者简介:黄开智(1989-),男,博士,主要从事学校课程与教学以及中学物理竞赛研究.

上式中 b 表示碰撞参数(即瞄准距离)

$$a \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E}$$

对于一个靶核而言,其微分散射截面为

$$d\sigma = 2\pi b |db| \quad (3)$$

截面为 A 的 α 粒子束轰击靶核时,散射核有 Ant 个. 设靶核互不遮蔽,假定每个 α 粒子只经过单次散射,实际上也就是要求每个原子的散射截面没有重叠. 为了能更好地说明,本文采用了如图 2 所示的靶核模型. 共有 Ant 个靶原子均匀密排于平面内,达到了每个靶原子互不重叠的要求.

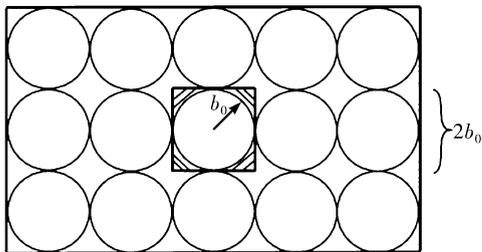


图 2 未重叠的单层靶核模型

设最大的碰撞参数为 b_0 , 每个靶原子在平面占的面积可以看成是一个正方形的面积 $S = (2b_0)^2$, 又因截面 A 上共有 Ant 个原子, 故每一个原子所占的面积为 $\frac{A}{Ant} = \frac{1}{nt}$, 于是就有

$$(2b_0)^2 = \frac{1}{nt} \quad (4)$$

求得

$$b_0 = \sqrt{\frac{1}{4nt}} \quad (5)$$

而最大的 b_0 对应最小的 θ_0 , 将式(5)代入式(2), 有

$$\frac{a}{2} \sqrt{4nt} = \tan \frac{\theta_0}{2} \quad (6)$$

令 $\theta_0 \rightarrow 0$ 时, 有 $\tan \frac{\theta_0}{2} \rightarrow \frac{\theta_0}{2}$, 则

$$\theta_0 = a \sqrt{4nt} \quad (7)$$

当能量为 7.68 MeV 的 α 粒子轰击 0.1 μm 的金箔时, $a = 2.96 \times 10^{-14}$ m, 且在常温时金原子的数密度为 $n = 5.91 \times 10^{28}$ 个/ m^3 , 代入数据可求得 $b_0 = 0.065 \times 10^{-10}$ m 以及 $\theta_0 = 4.55 \times 10^{-3}$ rad, 可见 θ_0 的大小还与入射粒子的能量大小有关.

1.3 考虑屏蔽效应时的散射角

以上所用的金箔厚度比原子线度还大了 3 个数量级(实际上 0.1 μm 的金箔已经十分薄了), 下面来估计在该尺度上屏蔽效应对散射角下限的影响.

屏蔽库仑势为

$$U(r) = -\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\frac{r}{p}} \quad (8)$$

由此得到玻恩近似微分截面^[3]

$$d\sigma_B = \frac{4\mu^2 Z_1^2 Z_2^2 e^4 d\Omega}{(4\pi\epsilon_0)^2 \left(4\mu^2 v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{\hbar^2}{p^2}\right)^2} \quad (9)$$

上式中 μ 表示 α 粒子的折合质量, v 表示粒子的入射速度, \hbar 为普朗克常量, p 表示屏蔽半径. 若 p_0 是第一波尔半径, 则有 $p \approx \frac{p_0}{Z_2^{1/3}}$, 对于式(9), 当 $\frac{\hbar^2}{p^2} \rightarrow$

0 时, 可将式(9)改写为

$$d\sigma_B \approx \frac{1}{16} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E}\right)^2 \frac{2\pi \sin \theta d\theta}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (10)$$

又通过式(3)的简单运算, 发现

$$d\sigma = 2\pi b |db| = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E}\right)^2 \frac{2\pi \sin \theta d\theta}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (11)$$

显然当式(9)中 $\frac{\hbar^2}{p^2} \rightarrow 0$ 时, 就得到了纯库仑微分散射截面式(11), 二者的差别是式(9)可以避免小角度时, 出现 $d\sigma_B$ 趋于无穷大的情形. 将式(9)积分有

$$\sigma_B = \frac{16\pi\mu^2 Z_1^2 Z_2^2 e^4 p^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^4 \left(\frac{4\mu^2 v^2 p^2}{\hbar^2} + 1\right)} \quad (12)$$

上式表示的是在考虑屏蔽效应后, 理论上粒子散射的总截面. 由于在实际的散射过程中, 重合的靶核散射截面 S 必定小于式(12)所求得的总截面 σ_B , 说明散射式(9)仍会有一个下限散射角 θ_{\min} , 于是只要求出 θ_{\min} , 然后与 θ_0 作对比, 便可得出结论.

将式(9)对 θ 在 $\theta_{\min} \sim \pi$ 进行积分, 得到

$$\int d\sigma_B = 4\pi \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E}\right)^2 \cdot \frac{\cos^2 \frac{\theta_{\min}}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_{\min}}{2} + \left(\frac{\hbar}{2\mu v p}\right)^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{\hbar}{2\mu v p}\right)^2} \quad (13)$$

$\int d\sigma_B$ 表示散射角大于 θ_{\min} 的总的散射截面. 令 $K \equiv \frac{\hbar}{\mu v p}$, K 的物理意义为 α 粒子的德布罗意波长与屏蔽半径的比值, 这是一个非常小的量, 故可将式(13)的最后一项省去, 于是总的散射截面为

$$\int d\sigma_B = 4\pi \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E} \right)^2 \frac{\cos^2 \frac{\theta_{\min}}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_{\min}}{2} + \left(\frac{K}{2} \right)^2} \quad (14)$$

由于假定的是单次散射,因此 $\int d\sigma_B$ 的大小可用图 2 的圆面积来等效,有

$$\int d\sigma_B = \pi b_0^2 = \frac{\pi}{4nt} \quad (15)$$

将式(15)代入式(14)有

$$\frac{\pi}{4nt} = 4\pi \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E} \right)^2 \frac{\cos^2 \frac{\theta_{\min}}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_{\min}}{2} + \left(\frac{K}{2} \right)^2} \quad (16)$$

当 $\frac{\theta_{\min}}{2} \rightarrow 0$ 时, $\sin \frac{\theta_{\min}}{2} \approx \frac{\theta_{\min}}{2}$, $\cos \frac{\theta_{\min}}{2} \approx 1$, 则有

$$\frac{\pi}{4nt} = \pi \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E} \right)^2 \frac{1}{\theta_{\min}^2 + K^2} \quad (17)$$

运用式(7)关系

$$\theta_0 = a\sqrt{4nt} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E} \sqrt{4nt}$$

将其平方后代入上式,得到

$$\theta_0^2 = \theta_{\min}^2 + K^2 \quad (18)$$

这样通过 K , 便得到了 θ_0 与 θ_{\min} 之间的关系, 这是一个直角三角形三边边长的关系. 同样, 以 7.68 MeV 的 α 粒子轰击 0.1 μm 的金箔, 经计算得到: 屏蔽半径 $p = 0.12 \times 10^{-10}$ m, $K \equiv \frac{\hbar}{\mu v p} = 6.9 \times 10^{-5}$ rad, $\theta_{\min} \approx \theta_0 = 4.55 \times 10^{-3}$ rad.

2 实验数据的验证

首先, 对式(1)变形为

$$\frac{dN}{d\Omega} \sin^4 \frac{\theta}{2} = Nnt \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E} \right)^2 = \text{const} \quad (19)$$

如果考虑屏蔽效应, 则有

$$\frac{dN}{d\Omega} \sin^4 \frac{\theta}{2} = Nnt \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2^* e^2}{4E} \right)^2 \quad (20)$$

其中 Z_2^* 表示有效核电荷数, 再将式(20)变形为

$$\left(\frac{Z_2^*}{Z_2} \right)^2 \frac{dN}{d\Omega} \sin^4 \frac{\theta}{2} = Nnt \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E} \right)^2 = \text{const} \quad (21)$$

其中散射角相应的瞄准距离

$$b = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E} \cot \frac{\theta}{2}$$

有效核电荷数 $Z^* = Z \exp\left(-\frac{b}{p}\right)$, 其中 $p \approx \frac{p_0}{Z_2^{1/3}}$, 其值为 0.12×10^{-10} m. 于是, 同样对于以 7.68 MeV 的 α 粒子轰击 0.1 μm 的金箔, 由文献[4]提供的数据(表 1), 并且将考虑了屏蔽效应的计算结果一同列入表中作对比, 可以用来验证式(21)的有效性.

从表 1 的实验数据来看, 在考虑了屏蔽效应后, 理论计算结果与不考虑屏蔽效应的计算结果相差不大, 但却与实验结果相差较大, 故这从侧面证实了小角散射时, 卢瑟福公式失效的主要原因应该不是未考虑核外电子的屏蔽效应, 而主要是入射粒子的单次散射假设不成立, 也就是说, 小角度时, 入射粒子历经了重叠散射的过程.

表 1 粒子散射实验的实验与理论计算结果对比

dN	$\theta/(\circ)$	$\frac{Z_2^*}{Z_2}$	$dN \sin^4 \frac{\theta}{2}$	$\left(\frac{Z_2^*}{Z_2}\right)^2 dN \sin^4 \frac{\theta}{2}$
33.1	150	0.999 839 0	28.813 97	28.823 25
43.0	135	0.999 751 1	31.327 80	31.343 40
51.9	120	0.999 653 1	29.193 76	29.214 02
69.5	105	0.999 539 0	27.532 87	27.558 27
221	75	0.999 217 2	28.978 17	29.023 59
477	60	0.998 959 7	29.812 50	29.874 62
1 435	45	0.998 550 3	30.775 89	30.865 31
3 300	37.5	0.998 231 3	35.229 84	35.354 79
8 800	30	0.997 759 8	35.000 92	35.158 27
27 300	22.5	0.996 983 5	39.546 28	39.785 95
132 000	15	0.995 445 8	38.314 63	38.666 01

3 结论

在本文的理论推算部分, 求得了屏蔽半径 p 与最大碰撞参数 b_0 之间的关系为

$$p = 0.12 \times 10^{-10} \text{ m} > 0.065 \times 10^{-10} \text{ m}$$

(同时 K 比 θ_{\min} 和 θ_0 小了两个数量级). p 与 b_0 对比如图 3 所示.

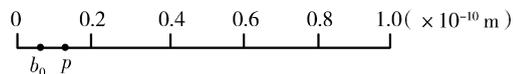


图 3 屏蔽半径与碰撞参数的对比

通过图 3, 不难得出在小角散射时, 卢瑟福散射公式的有效性主要是取决于单次散射假设的成立, 而不是核外电子的屏蔽效应假设的成立. 换句话说, 在小角散射时卢瑟福公式的失效主要是由于单次散射的假定不成立, 而非不考虑屏蔽效应. 在本文的数

据引用部分,也从侧面反映了这一点.另外,还有研究者认为,入射粒子在散射箔所展开的有效面积也是一个影响小角散射卢瑟福公式失效的因素^[5],这里就不再阐述了.以上这些结论对学生加深对卢瑟福散射公式的理解很有帮助.

参考文献

1 N. Mantri. On the small-angle end of the Rutherford scattering formula[J]. Am. J. Phys., 1977(45):1 122

- 2 杨福家.原子物理学(第4版)[M].北京:高等教育出版社,2010.14~24
- 3 L. I. Schiff. Quantum Mechanics (3rd edition) [M]. Mc. Graw-Hill co., 1968.202~234
- 4 褚圣麟.原子物理学[M].北京:高等教育出版社,1979.18
- 5 马晓栋,韩锋.关于卢瑟福散射公式中小角散射问题[J].新疆师范大学学报(自然科学版),1998(1):20~25

Discussion on the Validity of Rutherford Scattering Formula under the Small-angle Limit

Huang Kaizhi

(College of Physical Science and Technology, Central China Normal University, Wuhan, Hubei 430079;
Jiang-yan No. 2 High School, Taizhou, Jiangsu 225500)

Qiao Cuilan

(College of Physical Science and Technology, Central China Normal University, Wuhan, Hubei 430079)

Shen Chen

(Faculty of Artificial Intelligence Education, Central China Normal University, Wuhan, Hubei 430079)

Abstract: The theoretical value of Rutherford scattering formula in the large-angle scattering is in good agreement with experimental value. But when it comes to the small-angle scattering, it is found the formula has failed. Some researchers have given different answers that ignoring the extra-nuclear electron screening effect is the main reason to this issue. This paper thinks the failure of Rutherford scattering formula in the small-angle scattering is mainly due to the invalidity of the assumption of the incident particle's single scattering rather than ignoring the screening effect by related theoretical calculations, model building and data verification.

Key words: Rutherford scattering formula; validity; small-angle scattering; screening effect; single scattering

(上接第47页)

学生始终处于积极活跃的状态,提高学生参与度,激发学习主动性.课堂结束前后呼应、提炼升华.结束部分要关注细节,体现人性关怀,能够引发学生情感共鸣.特别是2020年疫情期间,布置思政实践作业,如第一章“材料学基础”,关注“抗疫材料”,调研疫情期间对抗疫起到关键作用的材料;第二章实践作业“关爱家人从厨房开始”,调研厨房使用的锅碗瓢勺使用的材料;第五章“材料的形变和再结晶”,结合塑性变形的知识,理解“千锤百炼始成钢”的含义.

总之,要使课程思政真正落地生根,仅仅依靠思政内容的挖掘是远远不够的,需要通过完整而科学

的教学设计来实现.教学目标的凝练,优化教学中的思政元素,信息化教学手段和方法的使用,教学过程的浑然一体,各个部分构成有机整体,有效的实施专业课程思政建设.

参考文献

- 1 习近平.把思想政治工作贯穿教育教学全过程[EB/OL]. [2016-12-08] (2021-01-28) http://www.xinhuanet.com/politics/2016-12/08/c_1120082577.htm
- 2 教育部.高等学校课程思政建设指导纲要[EB/OL]. [2020-5-28] (2021-01-28) http://www.gov.cn/zheingce/zhengceku/2020-06/06/content_5517606.htm
- 3 何克抗.建构主义的教学模式、教学方法与教学设计[J].北京师范大学学报(社会科学版),1997(5):74~81