电场的降维映射及电场线的绘制方法

岳国联　黄绍书

（六盘水市第三中学　贵州 六盘水　553000）

（收稿日期：2021－03－02）

摘　要：在平面内，根据共线点电荷的电场线方程来绘制的电场线，并不满足电场线的基本特征. 为解决此问题，笔者提出了将电场从三维空间降维映射到二维空间的方法，并提出了“映射电场”等概念，进而在平面内绘制出了共线或非共线点电荷的“映射电场线”，它们完全满足电场线的基本特征，解决了采用常规方法在平面内绘制电场线遇到的困难.

关键词：静电场　电场线　映射电场　电场线方程

电磁学中，常用电场线形象直观地描述静电场（本文“电场”均指静电场），由高斯定理出发，可得到电场线的基本特征[1,2]. 为了较为“精确”地描绘共线分布点电荷产生的电场线，常规做法是先推导出电场线方程[3~10]，再用计算机根据方程绘制[7~10]；对于分布于平面内非共线电荷，可以借助软件对电场线微分方程进行数值求解并绘制[11]. 采用这些方法绘制电场线，总存在这样或那样的问题[2,3]，本文将提出一种解决这些矛盾的有效办法.

1　电场线的特征

为了使电场线对电场强度的描述更加准确，结合高斯定理，对电场线做如下规定：电场线上每点的切线方向与该点的电场强度方向相同，穿过电场中任意一面元的电场线条数正比于该面的电通量[1].

由这个规定可以得出电场线的基本特征——电场线发自（止于）点电荷所在处；点电荷 Q 发出（终止）的电场线数与电荷量 Q 成正比；通过某一截面电场线数与该截面的电通量 Φ 成正比，无电荷处，电场线不中断[1,2].

由电场线的基本特征，可以得到电场线分布的另两个局部特征.

近距特征：由有限个点电荷形成的电场中，电场线均匀穿过以某电荷为球心、半径足够小的球面. 原因是在这个点电荷周围足够近的地方，该点电荷产生的电场远大于其他电荷在该处产生的电场.

远距特征：点电荷分布在有限区域内，若总电荷不为零，电场线均匀穿过以电荷分布区域内某点为球心、半径足够大的球面. 原因是在足够远处来看，这些电荷相当于集中于一点，电场强度相当于一个带有总电荷量的孤立点电荷产生的电场.

2　采用常规方法绘制电场线存在的问题

下面讨论采用常规方法绘制电场线存在的问题. 为了便于求出电场线方程的解析解，取电荷分布在一条直线上. 设所有电荷分布在 y 轴上，设第 i 个点电荷电荷量为 Q_i，位置坐标为 (x_i, y_i)，求经过 xOy 平面上任意一点 (x, y) 电场线方程，其方法有多种[3~11]，其中利用电通量的方法和利用矢量线方程的方法最为常见[3~9]，均得到如下电场线方程

$$\sum_i Q_i \frac{y - y_i}{\sqrt{x^2 + (y - y_i)^2}} = C \tag{1}$$

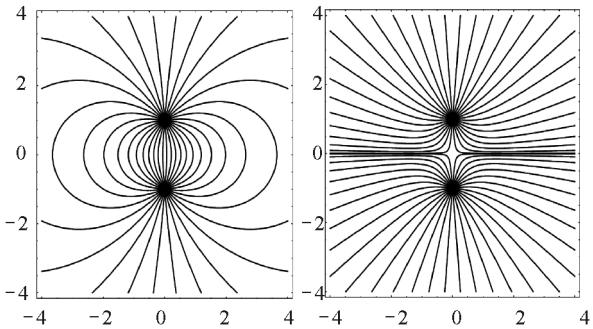
其中 C 为常量，不同的 C 值对应不同的电场线.

取 C 的等差数值代入式(1)，得到的电场线明显不能完全满足电场线的基本特征，故需要进一步改进，很多文献提到一些办法，例如取一些特殊 C 值代入式(1) 来绘制，特殊值的选取依据就是使其满足近距特征或远距特征[7,9,10].

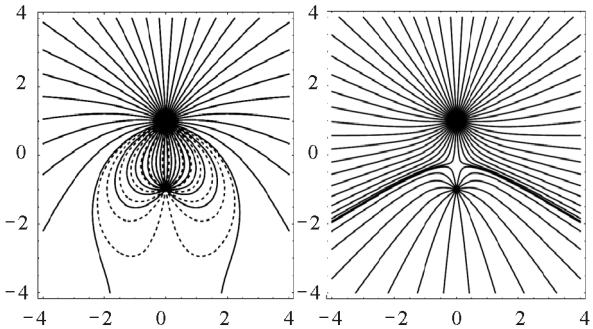
设单位电荷 q 产生的电场线数为 $n_0 = 16$，电荷量 Q_1 的位置坐标(0,1)，电荷量 Q_2 的位置坐标(0,

作者简介：岳国联（1983－　），男，本科，高级教师，研究方向主要为大学与中学物理教育教学衔接问题及普通物理学研究.

—1)，笔者在 Mathematica 中依照近距特征或远距特征确定值，绘制电场线图像如图 1、图 2 所示.

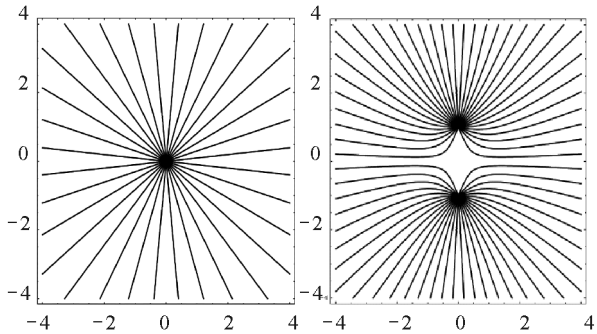


(a)$Q_1=-Q_2=2q$　(b)$Q_1=Q_2=2q$

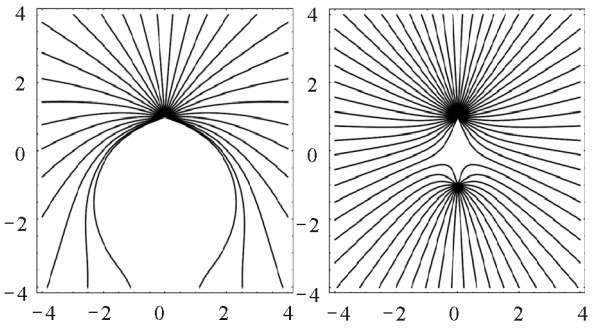


(c)$Q_1=-3Q_2=3q$　(d)$Q_1=3Q_2=3q$

图 1　按照近距特征确定 C 值绘制电场线



(a)$Q=2q$　(b)$Q_1=Q_2=2q$



(c)$Q_1=-3Q_2=3q$　(d)$Q_1=3Q_2=3q$

图 2　按照远距特征确定 C 值绘制电场线

图 1 按照是按照近距特征确定 C 来绘制，一定都满足近距特征.

图 1(a) 中是等量异种电荷的电场线. Q_1 发出满足近距特征的电场线，与终止于 Q_2 满足近距特征的电场线完全重合，两个电场线周围均满足近距特征，电场线没有延长到远距离空间去，不能存在远距特征；图 1(b) 和(d) 中是同种电荷电场线. 两个电荷周围电场线均满足近距特征，但不满足远距特征，电场线之间似乎有一种挤压的现象，说明近距特征与远距特征间存在矛盾；图 1(c) 中，是非等量异种电荷电场线. 实线是 Q_1 发出满足近距特征的电场线，虚线是终止于 Q_2 满足近距特征的电场线，实线与虚线无法完全重合，说明近距特征间存在相互矛盾.

图 2 是按照远距特征确定 C 来绘制，一定满足远距特征.

图 2(a) 中是孤立点电荷的电场线. 同时满足远距特征和近距特征；图 2(b) 和(d) 中是同种电荷电场线. 满足远距特征，但不满足近距特征，说明近距特征与远距特征间存在矛盾；图 2(c) 中是异种电荷的电场线. 满足远距特征，但是由于部分电场线从正电荷到负电荷，并没有延伸到较远空间去，无法在远距特征中加以体现，所以无法绘制.

从以上分析可以看出，除孤立点电荷、等量异种电荷的电场线外，其他分布点电荷的电场线均不能满足电场线的基本特征. 各电荷间近距特征相互矛盾、近距特征与远距特征间相互矛盾的现象，一些文献也指出了这个问题[2,3]，也有因此将电场线的特征作为“绘制电场线图的附加规定”[2].

笔者认为，绘制满足电场线的基本特征，就是绘制电场线图的规定，没有必要加上“附加”. 因为由高斯定理得到电场线的基本特征体现了电场的某个基本属性，三维空间中描述电场的电场线是空间曲线，他们一定满足其电场线的基本特征(包括近距特征和远距特征)，而某个平面内的电场线只是众多电场线的一部分，该部分电场线无法满足电场线的基本特征也正常，就像将地图绘制到平面上时，总会导致变形是一个道理. 这并不是绘制中改进方法完不完善的问题，也不是技术高超不高超的问题，而是原本就该如此.

3　电场和电势的降维映射

通过前面分析可知，对于分布在平面内的一般电荷，通过电场线方程中 C 取特殊值的改进方式绘制该平面内的电场线，是不可能完全满足电场线的基本特征的. 要能在平面内绘制出完全满足其基本

特征的电场线，需要从电场本身着手，进行一种变换，使三维空间的电场降维映射到二维空间中去.

3.1　电场的降维映射及电场线绘制

为使平面内电场线完全满足电场应具有的特征，将电场从三维空间降维映射到二维空间去，映射后的电场是一种假想的电场，姑且称为映射电场，记为 $\boldsymbol{E}$，其电场线称为映射电场线，封闭曲面 $\boldsymbol{S}$ 对应为封闭曲线 $\boldsymbol{C}$，电通量对应于映射电通量 Φ.

类比高斯定理，假设映射电场在二维空间内遵从“二维高斯定理”，即

$$\Phi=\oint_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{C}=\frac{\sum_i Q_i}{\varepsilon_0} \tag{2}$$

由式(2)得到，二维真空中位于(x_0,y_0)点电荷 Q 在距点电荷 r 的(x,y)处产生映射电场为

$$\boldsymbol{E}=\frac{Q\boldsymbol{r}}{2\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\boldsymbol{e}_r \tag{3}$$

式中 ε_0 是真空介电常量；$\boldsymbol{e}_r$ 是从 Q 位置坐标指向(x,y)的单位矢量. 映射电场仍为矢量，方向与电场方向规定一致.

在二维空间多个点电荷形成的映射电场中，其映射电场穿过某曲线的映射电通量的等高线为映射电场线. 如图 3 所示，穿过曲线 C 的映射电通量为 Φ，若将曲线 C 的 A 端固定，则映射电通量 Φ 为 B 点坐标(x,y)的函数，对应的就是映射电场线方程.

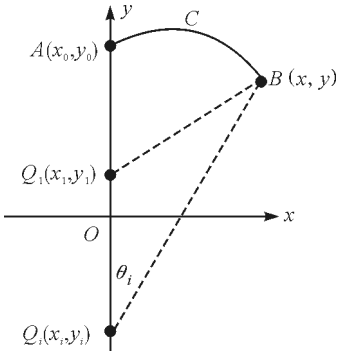


图 3　二维映射电场的映射通量等高线求解示意图

设第 i 个点电荷位于(x_i,y_i)，取 y 轴正方向映射电通量为零(图中 A 点)，则位于(x,y)处的 B 点对应映射电通量

$$\Phi=\int_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{C}=\int_C E_n \mathrm{d}C=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\sum_i Q_i\int_0^{\theta_i}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\sum_i Q_i\theta_i \tag{4}$$

其中 θ_i 为研究曲线两端与第 i 个电荷连线的夹角. 用直角坐标表示有

$$\Phi=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\sum_i Q_i\arctan\left(\frac{x-x_i}{y-y_i}\right) \tag{5}$$

不同电映射通量对应相应电场线，考虑定义域问题，$\theta_i=\arctan\left(\frac{x-x_i}{y-y_i}\right)$用复数的辐角表示更佳.

设单位电荷 q 产生的电场线数为 n_0. 每个常量 Φ 值对应一条映射电场线，等间距取 Φ 值，第 j 条电场线对应

$$\Phi_j=\frac{2j+1}{n_0\varepsilon_0} \tag{6}$$

其中，$j=-n_0,-n_0+1,\cdots,n_0-1$. 由于 Φ_j 间为等差数值，当电荷量增加一倍时，电场线数也增加一倍，因此对于 Q_i 产生的电场线数自动保持为 $n=\frac{Q_i}{q}n_0$ 条. 将式(6)代入式(5)得到 n 条电场线.

下面以等量同种电荷为例，设单位电荷 q 产生的电场线数为 $n_0=16$，在 Mathematica 中编写代码如下：

```
n0=16;(* 单位电荷数 *)
Q={2,-2};(* 电荷列表,对应Q1,Q2,Q3 *)
X={0,0};(* 电荷x轴坐标列表 *)
Y={1,-1};(* 电荷y轴坐标列表 *)
ϕj = Table[(2j + 1)2Pi/(2 n0), {j, -Length[X] n0,Length[X] n0-1}];(* 计算ϕj,考虑到定义域问题,需要扩大ϕj值范围 *)
p1=ContourPlot[Sum[Part[Q,j]ArcTan[(y - Part[Y,j]), (x - Part[X,j])], {j,1,Length[X]}]==ϕj, {x, -4,4}, {y, -4,4}, AxesOrigin->{0,0},ContourStyle->{Black}, PlotPoints->50,AspectRatio->1,Frame->True,FrameStyle->Black];(* 绘制映射电场线 *)
p2 = ContourPlot[Sum[Part[Q,j]ArcTan[(x - Part[X,j]),(y-Part[Y,j])],{j,1,Length[X]}]==ϕj,{x,-4,4},{y,-4,4}, AxesOrigin->{0,0},ContourStyle -> {Black},PlotPoints -> 50, AspectRatio -> 1,Frame -> True,FrameStyle -> Black]
Show[p1,p2] (* 重叠两张图片,显示更加完整 *).
```

得到电场线如图 4(a) 示，同理适当修改代码，可得到其他图像，如图 4 中其他图所示.

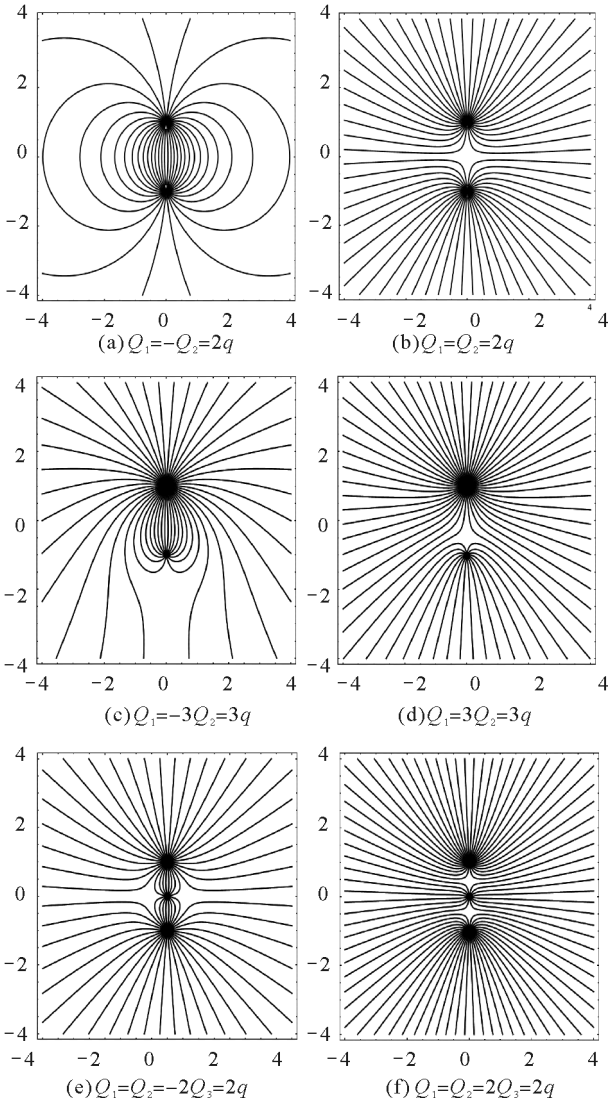


图 4　共线电荷与映射电场线

由图可以看出这映射电场线完全满足电场线的基本特征(包括近距特征与远距特征)，在绘制时不需要单独设定.

对于等量异种点电荷，对比图 4(a) 与图 1(a)，它们虽然都满足电场线的基本特征，但是电场线形状有一定区别. 图 1(a) 之所以满足电场线的基本特征是因为它没有远距特征，而且两个电荷量相同的特殊情形的结果，具有特殊性，而图 4(a) 中满足电场线基本特征是一种普遍性结果，是“二维高斯定理”的体现，有本质的区别.

值得一提的是，式(1) 仅适用于共线点电荷的电场线方程，而式(5) 不仅适用于共线点电荷的映射电场线方程，还适用平面内非共线多个点电荷的映射电场线方程，在 Mathematica 中绘制部分实例如图 5 所示(代码略)，设单位电荷 q 产生的电场线数为 $n_0=16$.

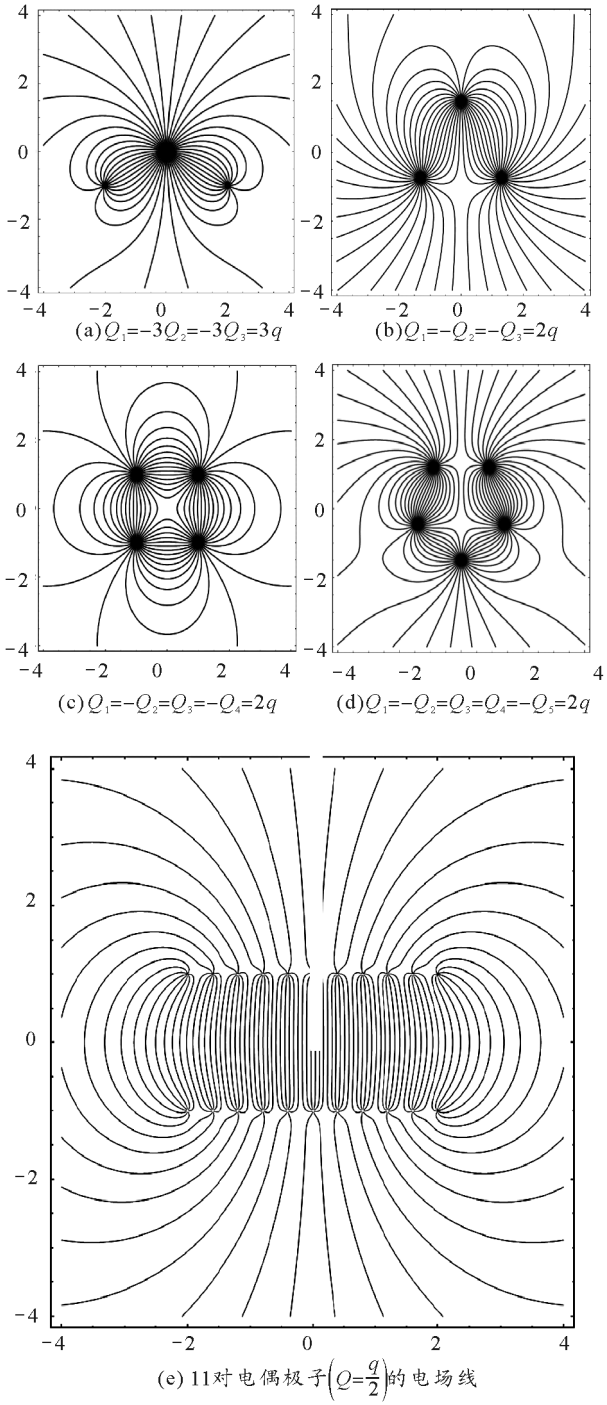


图 5　平面内非共线点电荷与映射电场线

3.2　电势的降维映射及等势线的绘制

在三维空间绘制等势面是比较容易，效果也很理想，但是为了绘制与映射电场线相互正交的等势线，需要将电势也作映射，姑且称为映射电势，用 φ 表示其等势线称为映射等势线.

类比三维空间电势及电势差的定义，在第 i 个点电荷产生的映射电场中，A 和 B 两点与点电荷距离分别为 r_{iA} 和 r_{iB}，结合式(3) 则 A 和 B 间映射电势差

$$\varphi_{iA}-\varphi_{iB}=\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{Q_i}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_{iB}-\frac{Q_i}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_{iA} \tag{7}$$

用 r_i 表示研究位置到参考面的距离，取 B 点映射电势为零(零势能参考面)，位于任意点(x,y) 的映射电势为 φ，则

$$\varphi=\sum_i \varphi_i=-\sum_i \frac{Q_i}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_i=$$

$$-\sum_i \frac{Q_i}{2\pi\varepsilon_0}\ln\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2} \tag{8}$$

φ 取等差数值代入式(8)，就得到在 xOy 平面内等差的映射等势线.

在 Mathematica 中用以下代码绘制等势线：

```
p3 = ContourPlot[- Sum[- Part[Q, i] Log
[Sqrt[(x + Part[X, i])^2 + (y - Part[Y,i])^2]],
{i,1,Length[X]}], {x, - 4,4}, {y, - 4,4},
AxesOrigin -> {0,0},ContourStyle -> {{Black,
Dashed}, {Black,Dashed}},PlotPoints -> 50,
ContourShading -> None,Contours -> 16,
ContourLabels -> Automatic,Frame -> True,
FrameStyle->Black];(* 绘制映射等势线，虚线 *)
Show[p1,p2,p3](* 映射等势线加在映射电场线上 *)
```

在图 5(c) 加上映射等势线后如图 6 所示.

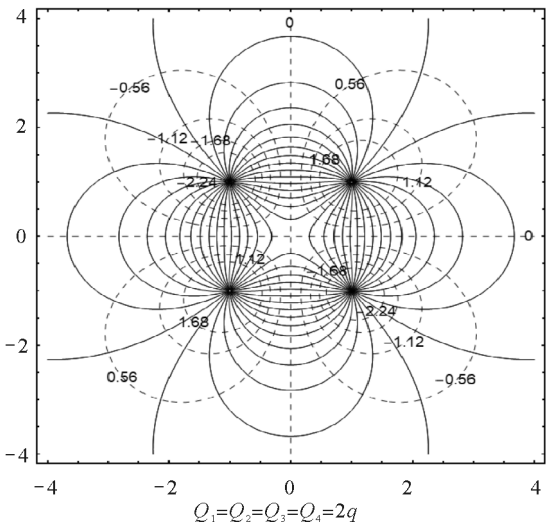


图 6　映射电场线及映射等势线(虚线)

三维空间与二维空间中电场相关物理量关系如图 7 所示.

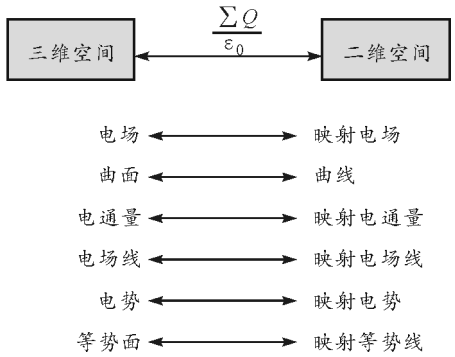


图 7　三维与二维空间中电场相关物理量对应关系

4　结束语

三维空间电场线分布满足电场线的基本特征，是满足高斯定理的必然结果，但是在 xOy 平面内视角去展示三维空间电场分布时，发现并不能都满足电场线的基本特征，主要体现在近距特征间相互矛盾、近距特征与远距特征相互矛盾的问题. 为了解决这个问题，以 $\Phi=\frac{\sum Q}{\varepsilon_0}$ 为桥梁，将三维空间电场降维映射到二维空间中去，得出比较简洁的映射电场、映射电场线的表达式，再通过计算机绘制，完全满足电场线的基本特征，同时还将电势进行了映射得到映射电势，映射电场线与映射等势线间仍然处处正交. 此方法不仅适用于共线电荷，还适用于同一平面内不共线的电荷的映射电场. 虽然这个映射电场线和映射等势线并不是真实电场线和等势线，但是它更能在某平面内展现电场线和等势线所具有的基本特征，仍具有重要意义.

参 考 文 献

1　梁灿彬，秦光戎，梁竹健. 普通物理学教程电磁学(第 3 版)[M]. 北京：高等教育出版社，2012

2　梁灿彬，曹周键，陈陟陶. 电场线两大性质是静电场两大定理的形象表述[J]. 大学物理，2017，36(11)：1 ～ 4，11

3　柴康敏，何波. 点电荷系电场线绘制的误区[J]. 物理与工程，2009，19(6)：20 ～ 22

4　吴胜杳，张靖仪. 共线电荷系的场线方程及场强[J]. 广东石油化工高等专科学校学报，1997(1)：56 ～ 58

5　姚晓玲，谭德宏，朱霞，等. 用高斯定理推导共线电荷系的电场线方程[J]. 物理与工程，2013，23(4)：1 ～ 3，6

6　李秀燕，陈赐海. 无限长均匀带电直线组电场分布的复势解法[J]. 大学物理，2010，29(1)：23 ～ 25，30

7　谢宁. 一维电荷分布系统的电场线[J]. 大学物理，2007(6)：5 ～ 10

8　戴亮，戴又善. 沿直线分布电荷体系电场线的解析解[J]. 大学物理，2007(7)：57 ～ 63

9　杨宁，梅中磊. 几种电力线绘制方法总结[J]. 电气电子教学学报，2018，40(3)：106 ～ 108，122

10　杜靓. 用 VB 语言模拟静电场中电场线的分布[J]. 中学物理教学参考，2007(8)：31 ～ 32

11　殷勇，王福谦. 二维复杂静电场的电场线方程求解及其数值模拟[J]. 大学物理，2020，39(7)：20 ～ 24

Dimension Reduction Mapping of Electric Field and Drawing Method of Electric Field Line

Yue Guolian　Huang Shaoshu

(No. 3 Middle School of Liupanshui, Liupanshui, Guizhou　553000)

Abstract: In the plane, the electric field lines drawn according to the electric field line equation of the collinear point charges do not satisfy the basic characteristics of electric field lines. To solve this problem, the author proposes a method to reduce the dimension of the electric field from three-dimensional space to two-dimensional space, And put forward the concept of "mapping electric field", and then drawing the "mapping electric field lines" of collinear or non-collinear point charges in the plane. They fully meet the basic characteristics of electric field lines, and solve the problem of using conventional methods in the plane. Difficulties encountered in drawing electric field lines.

Key words: electrostatic field; electric field lines; mapping electric field; electric field line equation

(上接第 77 页)

这个结果指出：无论质量比 k 为任何有限正值，且无论角度 θ_0 为给定的何值，小球与斜面脱离位置 θ 均达不到 90°，换句话说文献[1]中“当 $k\to\infty$ 时 $\theta\to\frac{\pi}{2}$，即 $M\gg m$ 时小球才会在最低点与斜面脱离”的结论与初始角度 θ_0 无关.

最后我们根据式(5)，以 θ 为横坐标($\theta\in[\theta_0,\frac{\pi}{2}]$)，$k$ 为纵坐标，用 Mathematica 绘制 θ_0 分别取 10°，30°，55° 对应的 3 条 $k-\theta$ 图线(为使图像均衡，k 轴已移至 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 处)，结果如图 3 所示. 图 3 中从左往右依次是 θ_0 取 10°，30°，55° 时 k 与 θ 的函数图线. 可以看到，对同样质量比而言，脱离角度 θ 随 θ_0 的增大而增大. 图线还直观验证了前面得到的两个结论——“质量比 k 越大则脱离位置 θ 越大”以及“无论质量比 k 是什么有限值，脱离位置 θ 都一定小于 $\frac{\pi}{2}$”都与初始参数 θ_0 无关.

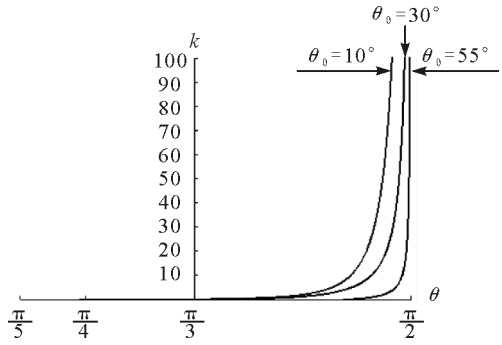


图 3　$k-\theta$ 曲线

参 考 文 献

1　陈新华，陶兆宝. 充分利用错题资源 探寻物理本质规律[J]. 物理教学，2019(12)：57 ～ 59

2　菲赫金哥尔茨. 微积分学教程(第一卷)(第 8 版)[M]. 北京：高等教育出版社，2016. 234