

非惯性系中大摆角单摆周期的积分形式及数值分析

赵清锋

(武汉市卓刀泉中学建和分校 湖北 武汉 430065)

(收稿日期:2021-03-24)

摘要:以悬点可在水平方向无阻尼运动单摆模型为例进行分析. 首先对单摆的运动轨迹进行计算, 得到摆球运动轨迹为椭圆, 结合系统水平方向动量守恒和机械能守恒定律计算摆球在任意位置的速度, 并结合轨迹和速度求出单摆运动周期的积分形式; 然后分析其周期与摆线初始角度的关系, 并与相关文献计算的小角度摆动周期进行比较分析.

关键词:非惯性系 单摆 振动周期 数值分析

单摆问题是基础物理中的重要模型, 在物理学中有广泛的应用, 对于单摆的研究非常多, 而其中的研究多限于固定悬挂点单摆做圆周运动的周期, 包括大摆角周期公式、有无空气阻尼的影响、不同摆次单摆的周期、解析解等^[1~6]. 对于非惯性系单摆运动

事相关行业更加得心应手^[7].

“半导体物理学”课程的“线上 + 线下”混合教学模式, 将理论、实践、行业的前沿信息综合一起, 三者结合能够提高微电子专业人员的综合素养^[8].

4 结束语

“半导体物理学”作为微电子专业的核心课程之一, 其专业性强, 需要很多前置课程来铺垫, 同时由于知识理解难度大、交叉学科多等特征, 学生学习起来较为吃力. 本文结合中美贸易摩擦局势和国内新冠疫情的情况, 提出了对半导体物理学合理增减教学内容的改革措施, 制定具有微电子专业针对性的教学计划; 引入“线上 + 线下”混合的教学模式, 多元化线上教学手段能极大地提升教学效率和培养兴趣, 线下的教学既要重视理论基础也要重视实践, 搭建校企合作平台为学生锻炼实践能力, 不仅能够让学生了解到最新的行业前沿信息, 联系产业实际应用, 还能使学生深刻理解课上的知识点. 这门课程中认真学习并通过考核的学生, 一定会对学习半导体物理的基本原理和方法有清晰的认识, 后续学习微电

问题在近几年中学生物理竞赛中出现的次数较多, 相关文献也对此有研究, 文献[7]用不同方法计算了无固定悬挂点单摆周期, 文献[8,9]利用机械能守恒分析了匀加速直线运动系统和定轴转动非惯性系统单摆周期, 但都只分析了小角度振动周期, 对于

子工艺、激光原理、封装技术等课程将很容易上手.

由于自身的教学水平和经验限制, 对于本课程的建议可能不太成熟, 在今后的教学工作中, 将会对上述措施逐步完善和改进, 促进“半导体物理学”课程的教学效果不断提高.

参考文献

- 1 王印月, 赵猛. 改革半导体课程教学融入研究性学习思想[J]. 高等理科教育, 2003(1): 69 ~ 71
- 2 杜佳, 禹文东. 特殊背景下的高校线上教学探索[J]. 产业与科技论坛, 2020, 19(22): 198 ~ 199
- 3 陈志刚, 姜伟, 杨娜, 等. “线上 + 线下”混合式教学模式的探讨[J]. 中外企业家, 2020(13): 195
- 4 刘恩科, 朱秉升, 罗晋生. 半导体物理学(第7版)[M]. 北京: 电子工业出版社, 2011
- 5 张俊举, 张益军, 高建坡, 等. “半导体物理”课程教学改革[J]. 电气电子教学学报, 2018, 40(3): 37 ~ 39
- 6 吕淑媛, 刘崇琪, 李晓莉, 等. 以学生为中心, 提升课程质量的教学改革初探 —— 以《半导体物理与器件》课程为例[J]. 高教学刊, 2020(21): 143 ~ 146
- 7 周沁涵. 浅谈微电子技术的应用与发展[J]. 科技风, 2019(1): 89
- 8 王阳元. 21 世纪的硅微电子学[J]. 中国科技奖励, 2000(3): 6 ~ 11

非惯性系中大摆角振动问题研究较少. 基于此, 本文从无阻尼非惯性系出发, 对悬点可动单摆周期进行了计算, 得出周期的积分形式, 并应用数值计算与相关研究结果进行对比分析.

1 悬点可在水平方向无阻尼运动单摆周期的积分形式

考虑无阻尼情况, 质量为 M 的小环 A 套在光滑的水平固定杆上, 摆球 B 的质量为 m , A 和 B 用一长度为 l 的轻绳连接[模型来源 2019 年全国中学生物理竞赛(江苏赛区)第一轮复赛第 15 题, 教材中也有对应模型^[10], 如图 1 所示]. 本文以摆线与竖直方向初始夹角为 θ 进行计算(原题中摆线从水平位置自由释放).

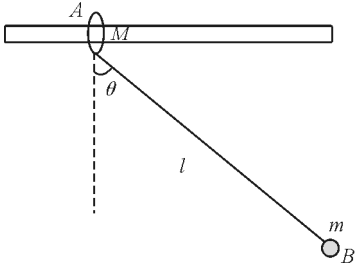


图 1 悬点无阻尼单摆模型

由于杆是光滑的, 小环 A 和摆球 B 在水平方向所受合外力为零, 系统质心在水平方向的坐标保持不变, 即质心位置到摆球 B 的距离应该为

$$l_1 = \frac{M}{M+m}l \tag{1}$$

考虑悬线在摆动过程中质心水平坐标不变, 而竖直坐标在变化, 为方便研究, 取摆线水平时质心位置为坐标原点 O , 建立直角坐标系如图 2 所示(其中摆线与竖直方向夹角为 θ 时, 令 OB 与水平方向的夹角为 φ , $l_2 = l - l_1$, v_B 为摆球 B 的速度, ϕ 为摆球 B 此时运动方向与水平方向的夹角).

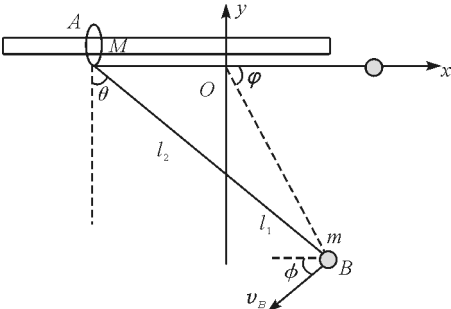


图 2 悬点无阻尼单摆坐标系及相关物理量

分析可知, 摆球 B 对应的横纵坐标分别为

$$x = l_1 \sin \theta \quad y = -l \cos \theta$$

联立两式消去 θ 可得摆球运动的轨迹方程为椭圆的一部分, 如下

$$\frac{x^2}{l_1^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1 \tag{2}$$

对式(2)求导可得椭圆上此点切线斜率为

$$y' = \tan \phi = -\frac{x l^2}{y l_1^2} = \frac{l \sin \theta}{l_1 \cos \theta} = \frac{M+m}{M} \tan \theta \tag{3}$$

角度 ϕ 为摆球 B 此时速度的方向与水平方向夹角, 为方便后文计算, 进一步化简可得

$$\cos \phi = \frac{l_1 \cos \theta}{\sqrt{l^2 \sin^2 \theta + l_1^2 \cos^2 \theta}} \tag{4}$$

由于水平方向外力之和为零, 所以水平方向动量守恒

$$M v_A = m v_B \cos \phi \tag{5}$$

将式(1)、(4)代入式(5)可得

$$v_B = \sqrt{\frac{M^2}{m^2} + \frac{(M+m)^2 \sin^2 \theta}{m^2 \cos^2 \theta}} v_A \tag{6}$$

设摆绳初始时刻与竖直方向的夹角为 θ_0 , 由于系统机械能守恒

$$mgl(\cos \theta - \cos \theta_0) = \frac{1}{2} M v_A^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 \tag{7}$$

将式(6)代入式(7)可得

$$v_A = \sqrt{\frac{2m^2 gl \cos^2 \theta \cos(\theta - \theta_0)}{M^2 + m^2 \sin^2 \theta + Mm(1 + \sin^2 \theta)}} \tag{8}$$
$$v_B = \sqrt{\frac{2gl(\cos \theta - \cos \theta_0)(M^2 + m^2 \sin^2 \theta + 2Mm \sin^2 \theta)}{M^2 + m^2 \sin^2 \theta + Mm(1 + \sin^2 \theta)}} \tag{9}$$

以 O 为圆心, $d\varphi$ 角度对应的圆弧长度即为

$$ds_0 = \frac{l \cos \theta}{\sin \varphi} d\varphi \tag{10}$$

而小球轨迹并非圆弧, 而是椭圆, 根据几何关系可得 $d\varphi$ 对应的轨迹弧长

$$ds = \frac{ds_0}{\sin(\varphi + \phi)} = \frac{l \cos \theta}{\sin \varphi \sin(\varphi + \phi)} d\varphi \tag{11}$$

根据式(9)和(11)即可得到摆球周期的积分形式

$$T=4t=4\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}s}{v_B}=4\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{l\cos\theta}{\frac{\sin\varphi\sin(\varphi+\phi)}{v_B}}\mathrm{d}\varphi\tag{12}$$

φ_0 为摆绳初始时 OB 与水方向的夹角. 由于质心水平位置坐标不变, 可将 θ 用 φ 取代

$$\tan\theta=\frac{\frac{M+m}{M}}{\tan\varphi}\tag{13}$$

由式(3) 和式(13) 可将 ϕ 用 φ 取代

$$\tan\phi=\frac{\left(\frac{M+m}{M}\right)^2}{\tan\varphi}\tag{14}$$

将式(13) 和式(14) 带入式(12) 即可进行数值积分计算^[11].

对于此类模型的周期, 竞赛题答案多采用受力分析结合非惯性系动力学方程求解, 这种方法通过数值计算也可求出模型的准确周期或频率, 相关文献给出其他方法, 当摆角 θ 较小时取 $\sin\theta\approx\theta$, 然后近似计算小角度非惯性系单摆周期^[7, 8]. 在教材中有定义 M 水平坐标 x_1 和 θ 为广义坐标, 然后利用拉格朗日方程得到微分方程组^[10]

$$(M+m)\ddot{x}_1-ml\ddot{\theta}\cos\theta+ml\dot{\theta}^2\sin\theta=0$$
$$ml(l\ddot{\theta}-\ddot{x}_1\cos\theta)=-mgl\sin\theta$$

然后考虑摆角很小, 可以近似认为 $\sin\theta\approx\theta$, $\cos\theta\approx 1$, 并忽略含 $\ddot{\theta}$ 的高阶小量, 进而求得摆动周期^[10]. 这里我们消去上面微分方程组中的 $\ddot{x}_1$, 得到微分方程如下

$$\frac{Ml+ml\sin^2\theta}{\cos\theta}\cdot\ddot{\theta}+ml\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2+\frac{(M+m)g\sin\theta}{\cos\theta}=0\tag{15}$$

上式为二阶微分方程, 令 $x_1=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$, $x_2=\theta$, 带入

式(15) 降为一阶微分方程组, 再通过编程亦可求出相关物理量^[2, 11], 这也是分析力学中常用方法.

2 数值计算周期与近似周期的比较分析

根据上文, 取 $l=0.75\text{ m}$, $g=9.794\text{ }07\text{ m/s}^2$ ^[1], 令 $N=\frac{M}{m}$, 不同质量比值时, 得到对应大摆角悬点可动单摆周期的数值结果, 并与大摆角惯性系单摆周期进行比较(最后一栏), 如表 1 所示.

表 1 数值计算周期与近似周期的比较

无阻尼悬点可动单摆周期 T/s					无阻尼惯性系 单摆周期 T/s ^[1]
$\theta_0/(^{\circ})$	$N=1$	$N=5$	$N=100$	$N=10^7$	
45	1.434 9	1.693 7	1.801 6	1.808 2	1.808 0
44	1.426 9	1.689 2	1.798 4	1.805 0	1.804 9
43	1.419 0	1.684 7	1.795 2	1.802 0	1.801 9
42	1.411 3	1.680 3	1.792 1	1.799 0	1.799 0
41	1.403 6	1.676 1	1.789 2	1.796 0	1.796 1
40	1.396 0	1.671 9	1.786 2	1.793 2	1.793 3
39	1.388 6	1.667 8	1.783 4	1.790 4	1.790 6
37	1.374 1	1.659 9	1.778 0	1.785 1	1.785 3
35	1.360 2	1.652 4	1.772 8	1.780 1	1.780 4
33	1.346 7	1.645 3	1.768 0	1.775 5	1.775 7
30	1.327 7	1.635 4	1.761 3	1.769 0	1.769 3
27	1.310 0	1.626 3	1.755 3	1.763 1	1.763 5
24	1.293 8	1.618 2	1.750 0	1.758 0	1.758 3
20	1.274 7	1.608 8	1.743 9	1.752 0	1.752 4

从数值计算的数据进一步可以得到,大摆角悬点可动单摆周期变化随着 N 的减小而更明显,当 N 值很大时,其周期与悬点固定单摆周期基本一致(本文计算均为无阻尼情况, $N = 10^7$ 对应周期与文献[1] 周期存在微小差距,与数值计算精度有关).

当 $N = \frac{M}{m}$ 为不同值时,数值计算无阻尼悬挂点单摆在不同初始摆角运动周期 T 与小角度简谐运动周期 T_0 的比值,即 $\frac{T}{T_0}$ 随摆角 θ 的变化关系如图 3 所示,其中

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \frac{M}{M+m}}^{[7,10]}$$

l 为摆线的长度, g 为重力加速度, M 和 m 分别代表悬点和摆球的质量.

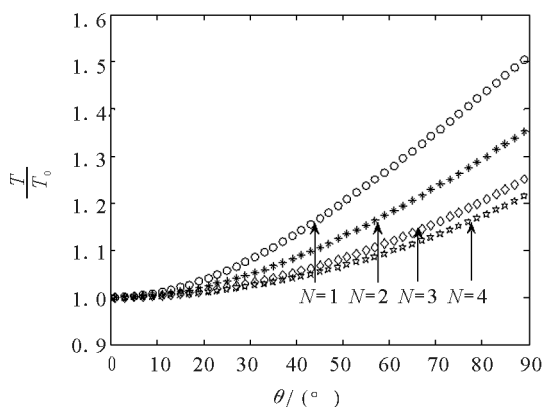


图 3 $\frac{T}{T_0}$ 随 θ 的变化关系

从图 3 可以看出,当角度较小时, $\frac{T}{T_0}$ 接近 1,随着初始摆角 θ 的增加, $\frac{T}{T_0}$ 也不断增加,即 T_0 仅适用于小角度悬点可动单摆,当角度较大时误差会较大不再适用;相同角度时,随着 N 的增加, $\frac{T}{T_0}$ 在减小,这与一般悬点固定的惯性系中大摆角单摆周期 $\frac{T}{T_0}$ 的比值明显不同,悬点固定的单摆相当于 $\frac{M}{m} \rightarrow \infty$,则

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \theta_0 + \frac{1}{4} \times \frac{3^2}{4^2} \sin^4 \theta_0 + \dots$ 比值固定^[1],

在惯性系中其比值仅与初始角度有关,而本文中的周期还与质量的比值有关,所以对于非惯性系大摆角单摆周期不能简单地类比.

3 结束语

本文从轨迹的角度出发进行计算,得出非惯性系单摆轨迹为椭圆的一部分(轨迹对应微元长度可得到),进而得到轨迹切线斜率及任意位置速度的方向 ϕ (如果未求轨迹则需要假设速度方向,再通过力与运动分解列对应方程组求出速度方向),再通过系统机械能守恒和水平方向动量守恒求出速度,得到周期的积分形式.其本质在于 $t = \frac{s}{v}$,只是转换成微积分形式,在数值计算比较普遍的当下,这种方法对于初学者是比较好的选择.

参考文献

- 柴聪聪,风飞龙,王公正,等.大摆角单摆“周期”变化的解析解及其实验应用[J].物理实验,2020,40(3):48~50
- 刘正成,李青松,孙迎春.单摆非线性特征的研究[J].物理实验,2018,38(1):56~59,63
- 邓宗茂.用几何画板软件计算大摆角单摆的周期[J].物理教师,2015,36(5):56~57
- 罗宏超,鞠丽平.利用等值单摆长研究漏摆周期的变化规律[J].大学物理,2019,38(7):26~30
- 赵清锋.任意摆长单摆振动周期的深入分析[J].物理教学,2018,40(5):21~23
- 安学立.一种简单摆周期测量装置[J].物理教师,2016,37(12):54~55
- 李力.用能量法简捷推导可动悬点单摆的谐运动周期[J].物理通报,2012(9):129
- 冯立芹.利用机械能守恒求解非惯性系单摆的振动周期[J].物理与工程,2014,24(5):40~42,44
- 张晓丽.用简谐运动的周期公式求单摆小角度摆动的周期[J].物理教师,2017,38(9):94~95,97
- 哈尔滨工业大学理论力学教研室.理论力学 II (第 8 版)[M].北京:高等教育出版社,2016.13~17
- 施吉林.计算机数值方法(第 3 版)[M].北京:高等教育出版社,2009.121~148