

利用频率定义推导多普勒效应公式

杨军伟

(浙江金华第一中学 浙江 金华 321015)

(收稿日期:2021-03-28)

摘要:利用频率的定义推导了非相对论情形下及相对论情形下的多普勒效应公式,并用此推导过程解答了两个问题.主旨在于从本质上去理解多普勒效应的实质,更加深刻地理解多普勒效应的机制.

关键词:频率 多普勒效应 相对论

多普勒效应首先由奥地利物理学家多普勒研究,发现波源与观察者互相靠近或者远离时,接收到波的频率会发生变化.本文通过频率定义导出波源频率与观察者接收到的频率之间的关系,得到多普勒效应的定量公式.

1 非相对论情形下多普勒效应公式

如图1所示,波源 S 在时段 t_0 至 $t_0 + dt_0$ 发出完整的 dN 个波,位移大小为 $v_S dt_0$, v_S 为波源的速率,观察者 P 在时段 t 至 $t + dt$ 接到此 dN 个波,位移大小为 $v_P dt$, v_P 为观察者的速率, α, β 分别为波源速度和观察者速度与 SP 连线的夹角.最先发出的波面在 t_0 时刻从波源 S 发出沿直线 SP 在 t 时刻到达观察者 P , $\overline{SP} = u(t - t_0)$,其中 u 为介质中的波速,最后的波面在 $t_0 + dt_0$ 时刻从波源 S' 发出沿直线 $S'P'$ 在 $t + dt$ 时刻到达观察者 P' , $\overline{S'P'} = u[(t + dt) - (t_0 + dt_0)]$.过 S' 作 SP 的垂线交 SP 于 S'' ,过 P' 作 SP 的垂线交 SP 于 P'' .由于 $v_S dt_0, v_P dt$ 相对 \overline{SP} , $\overline{S'P'}$ 为小量,则易知图中 θ_1, θ_2 均为小量,从而可得出 $\overline{SP} \parallel \overline{S'P'}$.

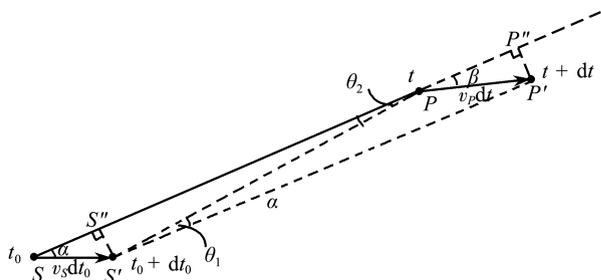


图1 推导多普勒效应公式示意图

由几何关系得

$$\overline{S'P'} = \overline{SP} - \overline{SS''} + \overline{PP''}$$

$$u[(t + dt) - (t_0 + dt_0)] =$$

$$u(t - t_0) - v_S dt_0 \cos \alpha + v_P dt \cos \beta \quad (1)$$

式(1)整理得

$$(u - v_P \cos \beta) dt = (u - v_S \cos \alpha) dt_0 \quad (2)$$

根据频率定义,波源发出波的频率和观察者测得波的频率分别为

$$\nu_0 = \frac{dN}{dt_0} \quad \nu = \frac{dN}{dt} \quad (3)$$

式(2)、(3)联立可得

$$\nu = \frac{u - v_P \cos \beta}{u - v_S \cos \alpha} \nu_0 \quad (4)$$

式(4)即为非相对论情形下多普勒效应公式.

在应用式(4)直接观察者感受到的频率时,特别注意 SP 为不同时刻的波源与观察者位置,因为 α, β 并不能直接从初或末时刻获得,从而导致在很多情形下直接应用公式并不方便.反而从式(4)推导的基础,即频率的定义出发,倒不失一般性,且方便.譬如如下实例场景.

【实例】(第22届全国中学生物理竞赛复赛试题)如图2(a)所示,两辆汽车A与B,在 $t=0$ 时从十字路口 O 处分别以速度 v_A 和 v_B 沿水平的、相互正交的公路匀速前进.汽车A持续地以固定的频率 ν_0 鸣笛,已知声速为 u ,且有 $u > v_A, v_B$,求解任意时刻汽车B的司机所检测到的笛声频率^[1].

解析:如图2(b)所示, t 时刻时笛声传播到汽车B,汽车B位于 $B(t)$ 处,距 O 点的距离为 $v_B t$.汽车A发出此笛声时为 t_0 时刻,位于 $A(t_0)$ 处,距 O 点的距离为 $v_A t_0$.此笛声由发出点到接收点(t 时刻B车所在点)所传播的路程为 $u(t - t_0)$,由几何关系可知

$$(v_B t)^2 + (v_A t_0)^2 = [u(t - t_0)]^2$$

由于 $u^2 > u^2 - v_A^2$, 且 $t > t_0$

解得

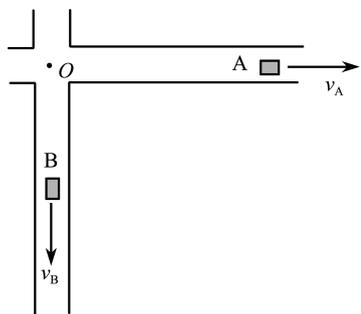
$$t_0 = \frac{u^2 - \sqrt{u^2(v_A^2 + v_B^2) - v_A^2 v_B^2}}{u^2 - v_A^2} t$$

两边取微元

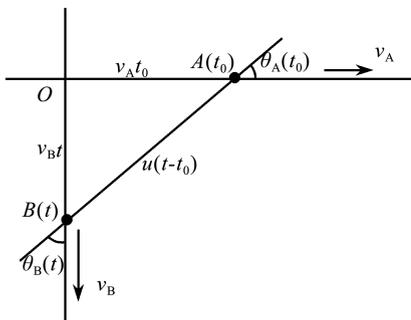
$$dt_0 = \frac{u^2 - \sqrt{u^2(v_A^2 + v_B^2) - v_A^2 v_B^2}}{u^2 - v_A^2} dt$$

因此

$$\nu = \frac{u^2 - \sqrt{u^2(v_A^2 + v_B^2) - v_A^2 v_B^2}}{u^2 - v_A^2} \nu_0$$



(a)



(b)

图 2 正交公路匀速前进的汽车 A 持续向 B 鸣笛

2 相对论情形下多普勒效应公式

根据频率定义, 波源参考系波的频率为 $\nu_0 =$

$\frac{dN}{d\tau_0}$, 观察者参考系测得的频率为 $\nu = \frac{dN}{d\tau}$, 其中 $d\tau_0,$

$d\tau$ 为波源观察者发出接收 dN 个波过程中的固有时. 在介质参考系中几何关系式(1) 仍然成立. 根据狭义相对论理论时间膨胀效应, 可知

$$dt_0 = \gamma_S d\tau_0 = \frac{d\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v_S^2}{c^2}}}$$

$$dt = \gamma_P d\tau = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{v_P^2}{c^2}}}$$

(5)

根据式(2)、(5), 得

$$\frac{u - v_P \cos \beta}{\sqrt{1 - \frac{v_P^2}{c^2}}} d\tau = \frac{u - v_S \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{v_S^2}{c^2}}} d\tau_0$$

注: 式(2) 中 u 为介质中的光速, 因此

$$\nu = \frac{\sqrt{1 - \frac{v_S^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v_P^2}{c^2}}} \frac{u - v_P \cos \beta}{u - v_S \cos \alpha} \nu_0 \quad (6)$$

式(6) 即是相对论情形下多普勒效应公式, 其中 α, β 为介质参考系中光源发出光时其速度与发光方向的夹角, 观察者接收光时其速度与光束的夹角.

同样我们可以依照式(6) 推导过程来解决如下问题.

问题: 如图 3 所示, 惯性系中的宇宙飞船 A, B 同时从 P 处出发, A 沿直线 l_A 方向以匀速度 v_A 运动, B 沿直线 l_B 方向以匀速度 v_B 运动, 直线 l_A 与 l_B 的夹角为锐角 φ , 两者在两直线交点 P 同时出发之后, A 向对方连续地发射本征系计时系统频率为 ν_0 的球面光波. 对方 B 可连续地接收到光波. 考虑相对论效应, 探讨 B 于固有时时刻 τ_B 接收到的频率 $\nu_B(\tau_B)$ [1].

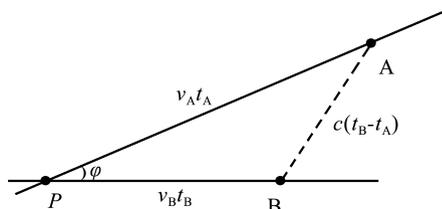


图 3 宇宙飞船发射信号接收信号过程

解析: 由几何关系可得

$$(v_A t_A)^2 + (v_B t_B)^2 - 2v_A t_A v_B t_B \cos \varphi = [c(t_B - t_A)]^2$$

解得

$$t_A = \left\{ [1 - \beta_A \beta_B \cos \varphi - \sqrt{(1 - \beta_A \beta_B \cos \varphi)^2 - (1 - \beta_A^2)(1 - \beta_B^2)}] (1 - \beta_A^2)^{-1} \right\} t_B$$

其中 $\beta_A = \frac{v_A}{c}, \beta_B = \frac{v_B}{c}$.

对上式两边微分得

$$dt_A = \left\{ [1 - \beta_A \beta_B \cos \varphi - \sqrt{(1 - \beta_A \beta_B \cos \varphi)^2 - (1 - \beta_A^2)(1 - \beta_B^2)}] (1 - \beta_A^2)^{-1} \right\} dt_B$$

(下转第 16 页)

和理解,从而达到极简教育技术所倡导的目的,为广大教师推动教育观念更新、在教学中推进新技术支持下的教育教学创新思路提供参考与借鉴.

参考文献

- 1 教育部. 教育信息化 2.0 行动计划[EB]. http://www.moe.gov.cn/srcsite/A16/s3342/201804/t20180425_334188.html, 018-04-13
- 2 黎加厚. 极简教育技术在基础教育领域的兴起[J]. 中国电化教育, 2019, 385(2): 6~9
- 3 盛宝骥. 用 GeoGebra 软件描绘电荷电势分布[J]. 物理教

师, 2018, 39(01): 71~73

- 4 殷正徐, 吴伟. GeoGebra 软件在高中物理课堂教学中的应用案例分析——以简谐振动和机械波为例[J]. 物理教师, 2017, 38(10): 70~73
- 5 卫延, 邵小桃, 郭勇. 基于 Matlab 的点电荷镜像法电场的可视化[J]. 电气电子教学学报, 2020, 42(2): 77~80
- 6 李鑫, 矫滕菲, 孙敏, 等. 多重镜像法求解三带电金属球的电场[J]. 大学物理, 2019, 38(10): 18~22
- 7 谢宝昌. 静电场导体球面与平面镜像关系研究[J]. 电气电子教学学报, 2015, 37(6): 17~20

Research on the Visualization of Mirror Method of Electric Field with Point Charge Based on the Idea of Minimalist Educational Technology

——Taking GeoGebra Software as an Example

Xiang Qian Zhou Zhiyi Ding Yimin Li Zheng Li Zijian

(Faculty of Physics and Electronic Technology, Hubei University, Wuhan, Hubei 430062)

Abstract: Carrying Minimalist Educational Technology (MET) into College physics class, we need physical software with strong calculation function, high visualization degree and convenient operation. Based on the idea of MET, GeoGebra is used to simulate the electric field of point charge with mirror method in this paper. By drawing the potential distribution and electric field intensity distribution, we visualize three kinds of mirror electric fields, including the point charge in the grounded plane conductor, in the grounded and ungrounded sphere conductor. With the application of GeoGebra software in the teaching of mirror electric field is introduced, we provide a new thought and angle to extend the idea of MET into College physics teaching in classes.

Key words: GeoGebra; minimalist educational technology; visualization; physics teaching

(上接第 11 页)

根据频率定义

$$dN = \nu_0 d\tau_A = \nu_0 \sqrt{1 - \beta_A^2} dt_A$$

$$dN = \nu d\tau_B = \nu_0 \sqrt{1 - \beta_B^2} dt_B$$

综合解得

$$\nu = \left\{ [1 - \beta_A \beta_B \cos \varphi - \sqrt{(1 - \beta_A \beta_B \cos \varphi)^2 - (1 - \beta_A^2)(1 - \beta_B^2)}] (\sqrt{1 - \beta_A^2} \sqrt{1 - \beta_B^2})^{-1} \right\} \nu_0$$

3 结束语

多普勒效应在生产生活中有非常重要的应用,从频率定义出发,我们可以从本质上去理解多普勒效应的实质,更加深刻地理解其机制.

参考文献

- 1 舒幼生. 奥赛物理题选(第 2 版)[M]. 北京: 北京大学出版社, 2013. 160~162