竞赛与物理专题研修

天体运动教学中应该重视的拉格朗日点*

吕俊君

（九江市同文中学　江西 九江　332000）

（收稿日期：2021－05－13）

摘　要：拉格朗日点是平面圆形限制性三体问题的 5 个特解，鹊桥中继卫星可以围绕拉格朗日 L_2 点做圆周运动实现地月通讯.我国在拉格朗日点的研究与应用领域收获了重大成果，以拉格朗日点为背景素材的试题也频频出现，在天体运动教学中应该重视.

关键词：拉格朗日点　三体问题　天体运动教学

近年我国成功发射了人类历史上第一颗地月中继卫星，并赋予其极具中华传统文化特色的名字"鹊桥".后续，"鹊桥"将进入环绕地月拉格朗日 L_2 点的使命轨道，完成嫦娥四号与地球之间中继通讯的任务.一时之间拉格朗日点成为学术界热烈讨论的话题，在中学的天体运动教学中，也出现了大量以拉格朗日点为背景素材的试题.那么拉格朗日点具备怎么样的特征，"鹊桥"为什么能够绕 L_2 点做匀速圆周运动，教学中应该如何处理这类问题呢？

1　平面圆形限制性三体问题

如图 1 所示为一孤立的双星系统，设两星体质量分别为 M 和 m，星体间距离为 R，双星靠着相互的万有引力围绕系统的质心做匀速圆周运动.质心 O 到星球 M 距离为 x_1，到星球 m 距离为 x_2，则有

$$x_1=\frac{mR}{M+m}\qquad x_2=\frac{MR}{M+m}$$

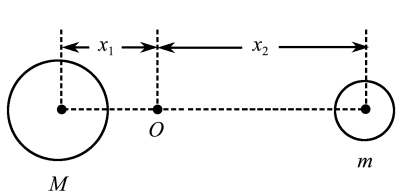

图 1　双星系统

如果在该双星系统中，放入第 3 个质量为 m_0 的小物体，小物体不影响 M 与 m 的受力情况与运动状态，但小物体同时受到 M 与 m 的万有引力作用并能够与他们保持相对静止，以共同的角速度绕质心做匀速圆周运动，小物体应该放在什么位置？这就是"平面圆形限制性三体问题"，该问题有 5 个特解.1767 年数学家欧拉根据旋转的二体引力场推算出其中的 3 个点（特解）L_1，L_2，L_3，1772 年数学家拉格朗日推算出另外两个点（特解）L_4 和 L_5；但后来习惯上将这 5 个点都称为"拉格朗日点"[1].如图 2 所示，L_1 点、L_2 点与 L_3 点均在两星体的连线上，L_4 点与 L_5 点则分别与两星体构成等边三角形.下面对这 5 个点进行讨论.

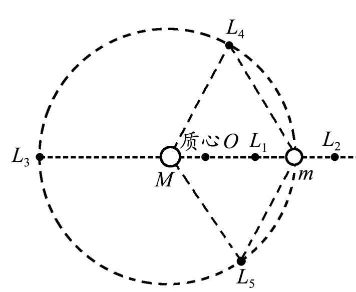

图 2　拉格朗日点

1.1　拉格朗日 L_1 点的位置

设拉格朗日 L_1 点处放置一质量为 m_0 的小物体可以在 M 与 m 共同的引力作用下绕 O 点做匀速圆周运动，并和 M，m 保持相对静止.

设 L_1 点到星体 m 的距离为 x，令 $x=kR$，对物体 m_0 分析，由牛顿运动定律可得

$$\frac{GMm_0}{(R-x)^2}-\frac{Gmm_0}{x^2}=m_0\omega^2(x_2-x)\tag{1}$$

* 江西省中小学教育教学课题"基于生活情景的试题命制研究"研究成果之一，课题编号：JJWL2019－242

对 m 分析，由牛顿运动定律可得

$$\frac{GMm}{R^2}=m\omega^2 x_2 \tag{2}$$

其中

$$x_2=\frac{MR}{M+m} \tag{3}$$

由式(1)～(3)联立解得

$$\frac{(1-k^3)(1-k^2)}{k^2-k^2(1-k)^3}=\frac{M}{m} \tag{4}$$

可以看出，式(4)即为拉格朗日 L_1 点的通解方程，只要知道 M 与 m 的质量之比，就可以求出 k 值，下面以日地系统为例计算.

太阳的质量 $M=1.989\times10^{30}$ kg，地球质量 $m=5.965\times10^{24}$ kg，两者质量之比 $\frac{M}{m}=333\ 445$，太阳与地球距离 $R=1.496\times10^{11}$ m，将数据代入式(4) $\frac{(1-k^3)(1-k)^2}{k^2-k^2(1-k)^3}=333\ 445$. 为了求出 k 值，不妨构造函数

$$y=(1-k^3)(1-k)^2-333\ 445[k^2-k^2(1-k)^3]$$

通过赋值方法寻找到 y 为零时 k 的数值，利用 MICROSOFT OFFICE EXCEL 工作表对 k 赋值，计算出以下结果[2]，如表 1 所示.

表 1　日地系统 L_1 点赋值

k	y
0.009 94	0.007 514 116
0.009 95	0.004 565 421
0.009 96	0.001 610 872
0.009 97	−0.001 349 536
0.009 98	−0.004 315 809
0.009 99	−0.007 287 954

当 $k\approx0.009\ 97$ 时，$y\approx0$. 因此拉格朗日 L_1 点距离地球约 $x=kR=1.49\times10^9$ m 处，即拉格朗日 L_1 点在距离地球约 149 万公里处.

在地月系统中，地球质量

$$M=5.965\times10^{24}\ \text{kg}$$

月球质量

$$m=7.349\times10^{22}\ \text{kg}$$

两者质量之比

$$\frac{M}{m}=81.2$$

地球与月球距离 $R=3.844\times10^8$ m，构造函数

$$y=(1-k^3)(1-k)^2-81.2[k^2-k^2(1-k)^3]$$

同样通过赋值法求出 k 数值，如表 2 所示.

表 2　地月系统 L_1 点赋值

k	y
0.148	0.044 124 348
0.149	0.029 240 471
0.150	0.014 199 719
0.151	−0.000 998 605
0.152	−0.016 355 194
0.153	−0.031 870 736

当 $k\approx0.151$ 时，$y\approx0$. 因此拉格朗日 L_1 点距离月球约 $x=kR=5.80\times10^7$ m 处，即拉格朗日 L_1 点在距离月球约 5.80 万公里处.

1.2　拉格朗日 L_2 点的位置

设 L_2 点到星体 m 的距离为 x，令 $x=kR$，对物体 m_0 分析，由牛顿运动定律可得

$$\frac{GMm_0}{(x+R)^2}+\frac{Gmm_0}{x^2}=m_0\omega^2(x+x_2) \tag{5}$$

对 m 分析，由牛顿运动定律可得

$$\frac{GMm}{R^2}=m\omega^2 x_2 \tag{6}$$

其中

$$x_2=\frac{MR}{M+m} \tag{7}$$

由式(5)～(7)联立解得

$$\frac{(1-k^3)(k+1)^2}{k^2(k+1)^3-k^2}=\frac{M}{m}$$

在日地系统中，通过赋值法可得 $k\approx0.010\ 03$，因此拉格朗日 L_2 点距离地球约 $x=kR=1.50\times10^9$ m 处，即拉格朗日 L_2 点在距离地球约 150 万公里处；在地月系统中，通过赋值法可得 $k\approx0.168$，因此拉格朗日 L_2 点距离月球约 $x=kR=6.46\times10^7$ m 处，即拉格朗日 L_2 点在距离月球约 6.46 万公里处.

1.3　拉格朗日 L_3 点的位置

设 L_3 点到星体 m 的距离为 x，令 $x=kR$，对物体 m_0 分析，由牛顿运动定律可得

$$\frac{GMm_0}{(x-R)^2}+\frac{Gmm_0}{x^2}=m_0\omega^2(x-x_2) \tag{8}$$

对 m 分析，由牛顿运动定律可得

$$\frac{GMm}{R^2}=m\omega^2 x_2 \tag{9}$$

其中

$$x_2=\frac{MR}{M+m} \tag{10}$$

由式(8)～(10)联立解得

$$\frac{(1-k^3)(k-1)^2}{k^2(k-1)^3-k^2}=\frac{M}{m}$$

在日地系统中，通过赋值法可得 $k\approx 2.000$，因此拉格朗日 L_3 点距离地球约 $x=kR=2.99\times 10^{11}$ m 处；在地月系统中，通过赋值法可得 $k\approx 1.993$，拉格朗日 L_3 点离月球的距离 $x=7.66\times 10^8$ m.

1.4　拉格朗日 L_4 和 L_5 点的验证

物体 m_0 同时受到 M 与 m 的引力作用，设合力方向交 M 与 m 的连线于 O 点，O 点距离 M 的距离设为 x，如图 3 所示.

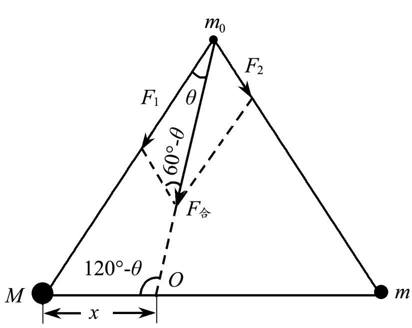

图 3　拉格朗日 L_4 和 L_5 点

在力三角形中，由正弦定理可得

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{\sin(60^\circ-\theta)}{\sin\theta}$$

由于$\dfrac{F_1}{F_2}=\dfrac{M}{m}$，则有

$$\frac{\sin(60^\circ-\theta)}{\sin\theta}=\frac{M}{m}$$

通过计算整理，得

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\left(\frac{1}{2}+\frac{M}{m}\right)\sin\theta \tag{11}$$

在几何三角形中，由正弦定理得

$$\frac{x}{R}=\frac{\sin\theta}{\sin(120^\circ-\theta)}=\frac{\sin\theta}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta} \tag{12}$$

将式(11)代入(12)并约去 $\sin\theta$ 解出

$$x=\frac{m}{M+m}R$$

可以发现，O 点的位置就是 M 与 m 系统的质心位置，说明，m_0 将围绕 M 与 m 系统的质心做匀速圆周运动，与 M 和 m 保持相对静止.

2　“鹊桥”绕地月系统 L_2 点的运动

为了探测月球背面的情况，必须在月球背面放置探测器，然而探测器的信号无法直接传输给地球. 为了解决这一问题，需要一颗中继卫星传递信号，构成地球和探测器间的桥梁，这就是“鹊桥中继卫星”(简称“鹊桥”). 它的运动可以简化为绕地球公转的同时围绕拉格朗日 L_2 点自转. 然而 L_2 点没有任何物体，为何会绕其运行呢？不妨从动力学角度进行分析.

设地球质量为 M，月球质量为 m，“鹊桥”质量为 m_0. L_2 点距离月球为 x，地月间距为 R. m_0 的受力情况如图 4 所示，其中地球对 m_0 的引力大小为

$$F_1=\frac{GMm_0}{\left(\dfrac{x+R}{\cos\alpha}\right)^2}$$

月球对 m_0 的引力大小为

$$F_2=\frac{Gmm_0}{\left(\dfrac{x}{\cos\theta}\right)^2}$$

选择以 O 点为圆心的匀速旋转参考系，在该参考系中，需要引入离心力，即 $F_{离}=m_0\omega^2\dfrac{x+x_2}{\cos\beta}$. 由于地月系统旋转角速度非常小，中继卫星在旋转参考系中受到的科里奥利力可以忽略不计[3].

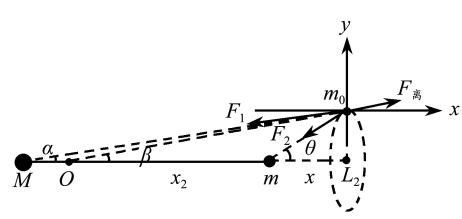

图 4　鹊桥在旋转参考系中的受力示意图

按照图中所示建立 x，y 坐标轴并将各个力正交分解，在 x 轴方向有

$$F_x=F_{离}\cos\beta-F_1\cos\alpha-F_2\cos\theta=$$

$$m_0\omega^2(x+x_2)-\frac{GMm_0}{(R+x)^2}\cos^3\alpha-\frac{Gmm_0}{x^2}\cos^3\theta$$

由于地月系统的质心 O 离月球很近，且 L_2 点到月球的距离远大于月球的半径，只需要很小的 θ 角就可以避开月球的阻挡实现中继信号传输[3]. 可以近似认为 $\cos\alpha\approx 1$，$\cos\theta\approx 1$，可以化简为

$$F_x=m_0\omega^2(x+x_2)-\frac{GMm_0}{(x+R)^2}-\frac{Gmm_0}{x^2}$$

由 1.2 中方程(5)可知 $F_x=0$.

在 y 轴方向有

$$F_y=F_{离}\sin\beta-F_1\sin\alpha-F_2\sin\theta=m_0\omega^2(x+x_2)$$

$$\tan\beta-\frac{GMm_0}{(x+R)^2}\cos^2\alpha\sin\alpha-\frac{Gmm_0}{x^2}\cos^2\theta\sin\theta$$

由于 α 与 β 极小，故 $\tan\beta\approx0$，$\cos\alpha\approx1$，$\cos\theta\approx1$，可得

$$F_y=\frac{GMm_0}{(x+R)^2}\sin\alpha-\frac{Gmm_0}{x^2}\sin\theta$$

考虑到 $\alpha\ll\theta$，可认为 $F_y=\frac{Gmm_0}{x^2}\sin\theta$，向心力由 F_y 提供，即

$$F_y=m_0\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2x\tan\theta$$

考虑到 $\sin\theta\approx\tan\theta$，可以求得

$$T=2\pi\sqrt{\frac{x^3}{Gm}}$$

这就是“鹊桥”的自转周期大小，可以发现其周期为一定值.

3 天体运动教学中的拉格朗日点

上面的分析均基于系统围绕质心做圆周运动，事实上在日地系统中，由于太阳的质量远远大于地球质量，系统的质心相当靠近太阳. 因此在中学阶段，可将太阳看成静止状态，地球绕太阳做匀速圆周运动，地月系统中也是同理. 在此基础上，可以归纳出天体运动教学中常见的拉格朗日点模型特征如表3所示.

表 3 常见的拉格朗日点模型特征

研究要素 / 研究对象	运动状态	受力特征	动力学方程（x 表示 m_0 到 m 的距离）
M	静止	无	无
m	围绕 M 以角速度 ω 做匀速圆周运动	只受 M 的万有引力作用	$G\frac{Mm}{R^2}=m\omega^2R$
m_0	围绕 M 以角速度 ω 做匀速圆周运动	同时受 M 与 m 的万有引力作用	L_1 点：$G\frac{Mm_0}{(R-x)^2}-G\frac{mm_0}{x^2}=m_0\omega^2(R-x)$ L_2 点：$G\frac{Mm_0}{(R+x)^2}+G\frac{mm_0}{x^2}=m_0\omega^2(R+x)$

基于模型特征，中学物理对拉格朗日点通常有如下考查.

3.1 考查拉格朗日 L_1 点

【例 1】如图5所示，拉格朗日点 L_1 位于地球和月球的连线上，处在该点的物体在地球和月球引力的共同作用下，可与月球一起以相同的周期绕地球运动. 据此，科学家设想在拉格朗日点 L_1 建立空间站，使其与月球同周期绕地球运动. 以 a_1，a_2 分别表示该空间站和月球向心加速度的大小，a_3 表示地球同步卫星向心加速度的大小. 则以下判断正确的是（　　）

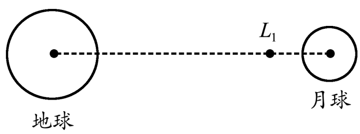

图 5 例 1 题图

A. $a_2>a_3>a_1$　　B. $a_2>a_1>a_3$

C. $a_3>a_1>a_2$　　D. $a_3>a_2>a_1$

解析：由于空间站和月球的角速度相同，月球轨道半径大于空间站轨道半径，根据 $a=\omega^2r$ 可知，$a_2>a_1$. 同步卫星的周期为1天，月球周期约27天，而且两者均只受到地球的吸引力，说明同步卫星的轨道半径小于月球.

根据 $a=\frac{GM}{r^2}$ 可知，$a_3>a_2$. 故 $a_3>a_2>a_1$. 答案选择 D.

点评：该题的突破口在于空间站和月球具有相同的角速度，由 $a=\omega^2r$ 判断加速度大小. 学生对此通常会有一个疑问：“为什么不能用 $a=\frac{GM}{r^2}$ 判断两者的加速度呢？”原因在于该公式针对只受到地球万有引力作用的卫星使用，但空间站同时受到地球和月球的万有引力，因此不能用该公式分析. 学生可能还会疑惑：“月球不会受到空间站的引力吗？”原因在于空间站质量远小于月球，对月球产生的引力加速度大小可以忽略不计.

3.2 考查拉格朗日 L_2 点

【例 2】如图6所示，地月拉格朗日 L_2 点在地球

与月球的连线上，若卫星在 L_2 点，受到地球与月球两大天体的引力作用，能与月球保持相对静止. 已知地球质量和地月距离，若要计算 L_2 点与地球的距离，只需要知道的物理量是（　　）

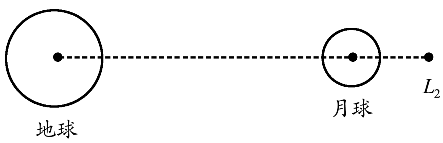

图 6　例 2 题图

A. 月球的质量　　B. 卫星的质量

C. 月球绕地球的运行周期　　D. 引力常量

解析：设地球质量为 M，月球质量为 m，卫星质量为 m_0，月地距离为 R，拉格朗日点到地球距离为 x，其中只有 M 与 R 为已知量.

卫星以角速度 ω 绕地球运动，卫星同时受到太阳与地球的引力. 据万有引力定律和牛顿定律，得

$$G\frac{Mm_0}{x^2}+G\frac{mm_0}{(x-R)^2}=m_0\omega^2 x \qquad (13)$$

月球绕地球运动的角速度也为 ω，根据万有引力定律和牛顿定律，有

$$G\frac{Mm}{R^2}=m\omega^2 R \qquad (14)$$

由式(13)与式(14)联立解得

$$\frac{R^2}{x^2}+\frac{R^2}{(x-R)^2}\frac{m}{M}=\frac{x}{R} \qquad (15)$$

由式(15)可知，在 M 与 R 已知的情况下，只需知道月球质量 m，即可求出 x，正确答案为 A.

点评：本题对卫星和地球分别列出动力学方程，学生需要去思考，为了求出 x，需要知道哪些物理量，考查了逆向思维能力.

3.3　考查拉格朗日 L_4 与 L_5 点

【例 3】两个靠得很近的天体绕着它们连线上的一点（质心）做匀速圆周运动，构成稳定的双星系统. 双星系统运动时，其轨道平面上存在着一些特殊的点，在这些点处，质量极小的物体（如人造卫星）可以相对两星体保持静止，这样的点被称为“拉格朗日点”. 现将地-月系统看作双星系统，如图 7 所示，O_1 为地球球心，O_2 为月球球心，它们绕着 O_1O_2 连线上的 O 点以角速度 ω 做圆周运动. P 点到 O_1 与 O_2 距离相等且等于 O_1O_2 间距离，该点处小物体受地球引力 F_E 和月球引力 F_M 的合力 F，方向恰好指向 O，提供向心力，可使小物体也绕 O 点以角速度 ω 做圆周运动. 因此，P 点是一个拉格朗日点. 现沿 O_1O_2 连线方向为 x 轴，过 O_1 与 O_1O_2 垂直方向为 y 轴建立直角坐标系；A，B，C 分别为 P 关于 x 轴、y 轴和原点 O_1 的对称点. D 为 x 轴负半轴上一点，到 O_1 的距离小于 P 点到 O_1 的距离. 根据以上信息可判断（　　）

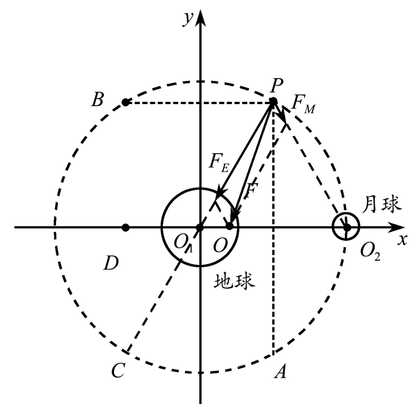

图 7　例 3 题图

A. A 点一定是拉格朗日点

B. B 点一定是拉格朗日点

C. C 点可能是拉格朗日点

D. D 点可能是拉格朗日点

解析：根据题中条件可知，P 点处小物体受到地球和月球吸引力的合力指向地月系统的质心，和月球以相同的角速度绕地球做匀速圆周运动. 根据对称性可知，A 点必然是拉格朗日点. B 点和 P 点受到地球的引力大小相等，但受到月球引力比 P 点处受到月球引力小，其合力方向不可能指向地月系统的质心，考虑到对称性可知，B 点与 C 点均不可能是拉格朗日点. 物体如果放在 D 点，同时受到地球和月球的吸引力，而地球在 D 点产生的引力加速度大于在月球处产生的引力加速度，说明放在 D 点处的物体的加速度一定大于月球，因此不能与月球保持相对静止. 因此答案为 A.

点评：质心是中学阶段不做要求的知识点，本题先介绍了质心的概念并解释了 P 点是拉格朗日点的原因，要求学生运用所学的知识判断其他点是否为拉格朗日点. 学生需要理解新的知识并学会应用它解决新的问题，很好地考查了知识迁移能力.

3.4　鹊桥中继卫星的运动情景

【例 4】2019 年 1 月 3 日，嫦娥四号成功着陆在月球背面开始了对月球背面区域的科学考察之旅. 由于月球在绕地球的运行过程中永远以同一面朝向地球，导致地球上的任何基站信号都无法直接穿透

月球与嫦娥四号建立联系，为此，我国特意于 2018 年 5 月 21 日成功发射了嫦娥四号中继星“鹊桥”，如图 8 所示，若忽略除地球和月球外其它天体的影响，运行在地月引力平衡点（地月第二拉格朗日点）的“鹊桥”的运动可简化为同时参与了以 L_2 点为中心的自转和与月球一起绕地球的公转两个运动，以确保嫦娥四号和地球之间始终能够正常地进行通讯联系．以下关于月球和中继星“鹊桥”运动的认识中正确的是（　　）

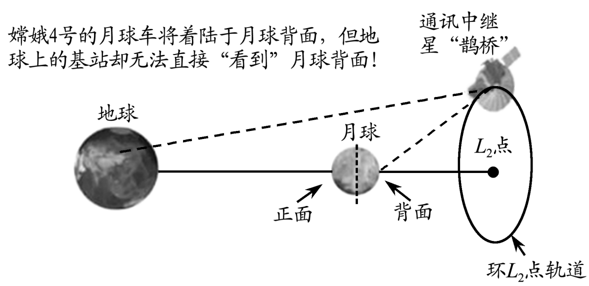

图 8　例 4 题图

A. 月球的自转周期与其绕地球的公转周期一定是相同的

B.“鹊桥”的公转周期一定大于月球的公转周期

C.“鹊桥”自转的周期一定等于其绕地球公转的周期

D.“鹊桥”绕 L_2 点自转的向心力一定是地球和月球对其万有引力的合力

解析：题干中明确指出，月球在绕地球的运行过程中永远以同一面朝向地球，因此月球的自转周期与其绕地球的公转周期一定是相同的，故 A 正确；“鹊桥”的公转周期与月球相同，故 B 错误；题干中没有给出“鹊桥”自转周期的信息，因此“鹊桥”自转周期不一定等于其绕地球公转的周期，故 C 错误；“鹊桥”同时参与了以 L_2 点为中心的自转和与月球一起绕地球的公转两个运动，“鹊桥”绕 L_2 点自转的向心力由地球和月球对其万有引力、惯性离心力三者的合力，故 D 错误．因此答案为 A.

点评：“鹊桥”同时参与了绕地球的公转与绕 L_2 点的自转，除了学习过物理竞赛的同学，大部分同学都无法转换参考系分析这类问题．但考虑到“鹊桥”同时参与了两个圆周运动，可以定性得到 D 选项是错误的．A 选项也具有隐蔽性，需要学生准确地抓住“月球在绕地球的运行过程中永远以同一面朝向地球”这句话的隐含条件．

4　结束语

研究拉格朗日点可以促进对深空探测技术的突破和掌握，对空间探测的未来发展将起到重要的推动作用[4]．我国对该项技术的研究处于世界前列，在教学中渗透相应内容，不仅可以加强学生对天体运动知识的运用，同时有利于树立爱国主义情怀，增强民族自豪感．拉格朗日点在教学中应该重视．

参 考 文 献

1　周小奋．拉格朗日点探秘[J]．物理教学，2012(3)：53～54

2　冯建跃．2012 年江苏物理卷又给我们上了一课——谈谈“拉格朗日点”[J]．物理教师，2012(12)：63～64

3　张怀华．鹊桥中继卫星绕飞地月拉格朗日点 L_2 原理分析[J]．物理教学，2019(7)：64～65

4　李广侠，姜勇，孙玉华．拉格朗日点在深空通信中的应用[J]．数字通信世界，2011(1)：84～87

Lagrangian Points that should be Paid Attention to in the Celestial Movement Teaching

Lyu Junjun

(Tongwen Middle School of Jiujiang City，Jiujiang，Jiangxi　332000)

Abstract：The Lagrange point is five special solutions to the plane circular restricted three-body problem. The Queqiao relay satellite can move in a circular motion around the Lagrange point L2 to achieve earth-moon communication. Our country is at the Lagrange point Significant results have been obtained in the field of research and application，and test questions with Lagrangian points as the background material also appear frequently，which should be paid attention to in the teaching of celestial movement.

Key words：Lagrangian point；three-body problem；celestial movement teaching