物理与生活

运用初等数学处理“彩虹圈”中的几个物理问题

张 明

（江苏省盱眙中学 江苏 淮安 211700）

（收稿日期：2021－05－17）

摘 要：对一种弹簧玩具“彩虹圈”进行了物理模型上的简化，运用初等数学对彩虹圈的伸长量、能量、悬停时间、落地速度等进行了计算.

关键词：彩虹圈 伸长量 能量 坍缩 质心 悬停时间

1 引言

在一次课外活动中，笔者所教的几个中学生拿着“彩虹圈”向笔者问了几个物理问题.“彩虹圈”是一种很流行的弹簧玩具，极其柔软，通常由弹性好的彩色塑料制成，整体的横截面有圆形、正方形、心形、五角形等等，簧丝截面为扁矩形.簧圈之间有一定的极小的预收缩力，不受外力时所有簧圈紧密排列在一起，因此不能压缩，可以拉伸，可以弯曲.由于劲度系数很小，仅在自重的作用下就可以伸展为原长的十几倍以上，它还可以自动翻滚、自动下楼梯等等，表现出许多奇妙的现象.若将处于水平地面的彩虹圈提起，让它在自重的条件下完全伸展，如图 1 所示，当上端释放时，彩虹圈的下落过程与一般物体不同.令人惊奇的是，彩虹圈的收缩过程如同坍塌的高楼，它的底端在空中悬停不动，而它的上端从上至下依次做多米诺骨牌式的收缩，收缩下落尚未达到的点的平衡和静止状态保持不变，直至收缩到最低点，坍缩为一个紧密排列的整体后，才开始以一定的初速度整体向下做落体运动[1,2].从彩虹圈释放开始，底端一直保持悬停，时间持续到彩虹圈完全坍缩.

学生问的几个物理问题，在文献[1,2]中能找到部分答案，但该文献的论述中涉及波动力学方程、非齐次微分方程等，中学生既无相关物理知识基础，也不具备相应的数学知识和运算能力，无法理解和接受，所以下面提出彩虹圈的简化模型，尝试运用中学生能理解的初等数学知识，对模型进行处理，解决彩虹圈中的几个核心物理问题.

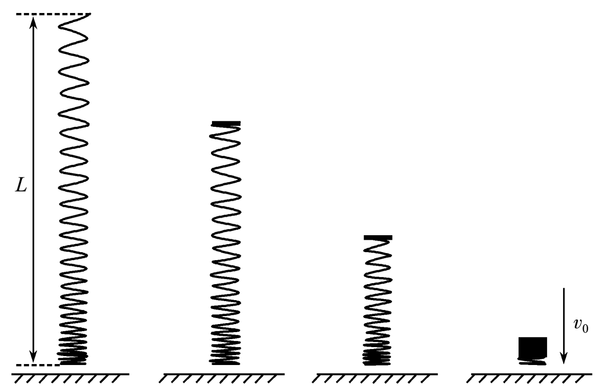

图 1 提起置于水平地面的彩虹圈

2 模型

彩虹圈是质量为 m，匀质圆柱状弹簧；紧密排列，预收缩力很小，忽略不计；遵循胡克定律；由于劲度系数 κ 极小，在自身重力作用下伸长量即可达原长的十几倍以上，故原长忽略不计.

3 几个物理问题

若将彩虹圈按质量等分为无穷多的 n 段，则每段质量

$$\Delta m=\frac{m}{n}$$

由于整个弹簧相当于 n 段小弹簧的串联，故每小段弹簧劲度系数

$$\kappa'=n\kappa$$

将处于水平地面的彩虹圈缓慢提起，让它在自重的条件下完全伸展，刚好离开地面.下面讨论彩虹圈的

作者简介：张明（1983－ ），男，中教一级，县骨干教师，研究方向为中学物理教学与竞赛.

伸长量、能量、坍缩和悬停时间、落地速度和能量损失.

3.1　形变量 L

如图 2 所示，从下至上，每段依次标记为 1，2，3，…，n，第 i 段的伸长量记为 Δx_i，则有

$$\kappa'\Delta x_i = i\Delta mg$$

故

$$\Delta x_i = \frac{i\Delta mg}{\kappa'} = \frac{1}{n\kappa}\frac{img}{n} = \frac{mg}{\kappa n^2}i \tag{1}$$

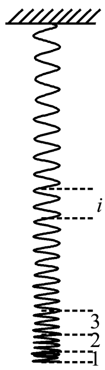

图 1　分析形变量

从第 1 到第 i 段总形变量

$$x_i = \sum\Delta x_i = \frac{mg}{\kappa n^2}\sum i = \frac{mg}{\kappa n^2}\frac{(i+1)i}{2} \tag{2}$$

由于 n 趋于无穷大，当 $i=n$ 时，可得弹簧总形变量

$$L = x_n = \frac{mg}{2\kappa} \tag{3}$$

3.2　彩虹圈中的能量 E

方法一：能量之和

彩虹圈的弹性势能和重力势能分别用 E_κ 和 E_{p} 表示，以水平地面为重力势能的零势能面，则第 i 段重力势能

$$\Delta E_{\mathrm{p}i} = \Delta mgx_i$$

将式(2) 代入得

$$\Delta E_{\mathrm{p}i} = \frac{mg}{n}\frac{mg(i+1)i}{2\kappa n^2} = \frac{(mg)^2(i^2+i)}{2\kappa n^3}$$

所以

$$E_{\mathrm{p}i} = \sum\Delta E_{\mathrm{p}i} = \frac{(mg)^2}{2\kappa}\left(\frac{\sum i^2}{n^3} + \frac{\sum i}{n^3}\right)$$

略去小量 $\dfrac{\sum i}{n^3}$ 可得

$$E_{\mathrm{p}i} = \frac{(mg)^2}{2\kappa n^3}\sum i^2$$

利用数学公式

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{4}$$

可得

$$E_{\mathrm{p}i} = \frac{(mg)^2}{2\kappa n^3}\frac{i(i+1)(2i+1)}{6}$$

当 $i=n$ 时，由于 n 趋于无穷大，略去小量，可得整个弹簧的重力势能

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{(mg)^2}{6\kappa}$$

将式(3) 代入，得

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{(mg)^2}{6\kappa} = \frac{mg}{3}\frac{mg}{2\kappa} = \frac{1}{3}mgL \tag{5}$$

第 i 段弹性势能

$$\Delta E_{\kappa i} = \frac{1}{2}\kappa'\Delta x_i^2$$

将式(1) 代入得

$$\Delta E_{\kappa i} = \frac{1}{2}n\kappa\left(\frac{mg}{\kappa n^2}i\right)^2 = \frac{(mg)^2}{2\kappa n^3}i^2$$

所以

$$E_{\kappa i} = \sum\Delta E_{\kappa i} = \frac{(mg)^2}{2\kappa n^3}\sum i^2$$

由式(4) 可得

$$W_i = \frac{(mg)^2}{2\kappa n^3}\frac{i(i+1)(2i+1)}{6}$$

当 $i=n$ 时，由于 n 趋于无穷大，同理略去小项，可得整个弹簧弹性势能

$$E_\kappa = \frac{(mg)^2}{6\kappa}$$

将式(3) 代入，得

$$E_\kappa = \frac{1}{3}mgL \tag{6}$$

最后将式(5)、(6) 代入 $E = E_\kappa + E_{\mathrm{p}}$，得弹簧的总能量

$$E = \frac{(mg)^2}{3\kappa} = \frac{2}{3}mgL$$

方法二：功能原理

由功能原理知，从地面缓慢提起彩虹圈，拉力 F 做的功 W 转化成了彩虹圈的弹性势能和重力势能.

当提起第 i 段时

$$F_i = (i-1)\Delta mg$$

在提起第 i 段的过程中，F_i 向上移动的距离

$$\Delta x'_i = x_i - x_{i-1}$$

利用式(2) 可得

$$\Delta x'_i = \frac{mg}{\kappa n^2}\frac{(i+1)i}{2} - \frac{mg}{\kappa n^2}\frac{i(i-1)}{2} = \frac{mg}{\kappa n^2}i$$

由于 $\Delta x'_i$ 极短，F_i 可看作是不变的，所以提起第 i 段拉力做功

$$\Delta W_i = F_i \Delta x'_i = \frac{(mg)^2}{\kappa n^3}(i^2 - i)$$

提起从第 1 段到第 i 段拉力做的总功

$$W_i = \sum \Delta W_i = \frac{(mg)^2}{\kappa} \frac{\sum i^2 - \sum i}{n^3}$$

由于 n 趋于无穷大，略去小量 $\frac{\sum i}{n^3}$，得

$$W_i = \frac{(mg)^2}{\kappa n^3} \sum i^2$$

当 $i = n$ 时，利用数学式(4) 并略去小量，同理可得

$$W = \frac{(mg)^2}{3\kappa}$$

将式(3) 代入，得

$$E = W = \frac{(mg)^2}{3\kappa} = \frac{2mg}{3} \frac{mg}{2\kappa} = mg \frac{2L}{3} \tag{7}$$

3.3 质心 坍缩和悬停时间

由于弹簧上端释放后，在整体落地前受到的外力只有重力，根据质心运动规律可知，质心做自由落体运动. 质心到达弹簧的底端时，刚好弹簧坍缩在一起，成为一个整体，然后以一定的速度整体向下做落体运动. 所以彩虹圈底端悬停的时间即坍缩时间，就是质心做自由落体运动的时间.

设弹簧的质心距地面的高度为 h_c，则

$$h_c = \frac{\sum \Delta m x_i}{\sum \Delta m_i}$$

将式(2) 代入得

$$h_{ci} = \frac{mg}{2\kappa n^3} \sum i^2$$

当 $i = n$ 时，由于 n 趋于无穷大，由式(4) 略去小量和式(3)，同理可得

$$h_c = \frac{mg}{6\kappa} = \frac{1}{3}L$$

或利用式(5)，由

$$mgh_c = E_p = \frac{1}{3}mgL$$

也可以得出

$$h_c = \frac{1}{3}L$$

由此可以看出，彩虹圈的重心不在中心处，因为提起的彩虹圈上疏下密，直观上就可以看出重心在中间偏下的地方. 质心自由落体时间，即底端悬停时间

$$t = \sqrt{\frac{2h_c}{g}} = \sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

若将式(3) 代入上式可得

$$t = \sqrt{\frac{m}{3\kappa}} \tag{8}$$

式(8) 揭示了一个有趣的结论：彩虹圈坍缩时间由自身的质量和劲度系数决定，与重力加速度无关！也就是说，同样一个彩虹圈，在地球、月球、火星等重力加速度不同的地方做如上实验，尽管彩虹圈伸长量、质心高度不同，但悬停时间是一样的.

3.4 落地速度及能量损失

彩虹圈释放后，一边收缩一边下落，弹性势能和重力势能转化为动能. 由于质心做自由落体运动，彩虹圈坍缩至地面

$$v = \sqrt{2gh_c} = \sqrt{\frac{mg^2}{3\kappa}}$$

将式(3) 代入可得

$$v = \sqrt{\frac{2gL}{3}}$$

落地时动能

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = mg\frac{L}{3}$$

由式(7) 知，落地时的动能只有彩虹圈伸展时初始总能量的一半，即

$$E_k = \frac{1}{2}E$$

损失的原因是彩虹圈从上至下坍缩，是完全非弹性碰撞过程，损失的另一半能量最终以热的形式耗散掉了.

4 结束语

若考虑彩虹圈的原长，以及在下面悬挂一个重物，则上述方法依然有效，所得结果的形式不变，只是会多出含有原长和重物的项，参见文献[1,2]. 忽略彩虹圈的原长是为了突出问题和方法的关键，使得运算和结果简洁易懂.

参 考 文 献

1 张声遥，柳福提，曾志强，等. 彩虹圈下落过程的动力学分析及实验验证[J]. 大学物理，2020，39(11)：56～59

2 路峻岭，秦联华. 魔力弹簧自由落体实验[J]. 大学物理，2013，32(6)：29～34