动能定理是否有单方向的“分解式”

孙永茂

（赣州市第三中学　江西 赣州　341000）

（收稿日期：2021－05－21）

摘　要：动能定理是解决力和运动问题的重要方法，动能定理是标量式，不能进行矢量分解，但教学中发现单方向使用动能定理也可解得相同的答案．针对此现象，用向量的方法证明了类似于“分量形式”的动能定理的合理性，即动能定理存在单方向的“分解式”，并进一步分析此“分解式”的使用条件．

关键词：动能定理　分解式　使用条件

1　问题引出

中学阶段有三大观点可以解决力与运动的相关问题，分别是力的观点、动量观点和能量观点，对于牛顿运动定律、动量定理和动量守恒定律，都可以分方向进行运用．对于动能定理，表述的是功与能的关系，功和能都是标量，可以分方向运用动能定理吗？也就是说，动能定理是否有单方向的“分解式”？我们从一道力学题入手进行分析．

【例 1】如图 1 所示，一质量为 m，电荷量为 q 的正电粒子在匀强电场中运动，A 和 B 为其运动轨迹上的两点．已知该粒子在 A 点的速度大小为 v_0，方向与电场方向的夹角为 60°，它运动到 B 点时速度方向与电场方向的夹角为 30°．不计重力，求 A，B 两点间的电势差．

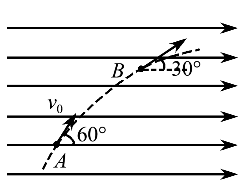

图 1　例 1 题图

在教学过程中，发现学生有以下两种解法．

解法 1：带电粒子只受电场力，粒子沿电场方向做匀加速直线运动，垂直电场方向做匀速直线运动，有

$$v_B\sin 30^\circ=v_0\sin 60^\circ \tag{1}$$

粒子从 A 到 B 点，由动能定理

$$qU_{AB}=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_0^2 \tag{2}$$

联立式(1)、(2)得

$$U_{AB}=\frac{mv_0^2}{q}$$

解法 2：带电粒子只受电场力，所以粒子速度的改变是由电场力决定的，电场力仅改变粒子沿电场方向的速度大小，在沿电场方向使用动能定理

$$qU_{AB}=\frac{1}{2}m(v_B\cos 30^\circ)^2-\frac{1}{2}m(v_0\cos 60^\circ)^2 \tag{3}$$

物体在垂直电场方向做匀速直线运动，有

$$v_B\sin 30^\circ=v_0\sin 60^\circ \tag{4}$$

联立式(3)、(4)得

$$U_{AB}=\frac{mv_0^2}{q}$$

【分析】对比两种解法，计算结果相同，对于解法 1，教师和学生都非常认同．但对于解法 2，咨询多位教学经验丰富的物理老师，发现此解法存在非常大的争议，教师之间存在两种不同的观点：

观点 1：解法 2 错误，因为动能定理是标量式，不能进行矢量分解，故不可以单方向运用动能定理，解法 2 的计算结果与解法 1 相同只是计算的巧合，不能当做规律进行推广．

观点 2：解法 2 正确，动能定理是标量式是毋庸置疑的，但标量也可以分解，如总功就可以分解为各个力做功之代数和．同理，对于动能的总变化量可以为各方向的动能变化量的代数和[1,2]．本题中，在沿电场方向和垂直电场方向建立直角坐标系，再分别求解各方向的动能的变化量，则有

$$F_{合}\ s=\Delta E_{kx}+\Delta E_{ky}$$

又因物体仅受水平方向的电场力，则 $\Delta E_{ky}=0$，所以

有 $F_{合}\ s=\Delta E_{kx}$，即解法 2 是正确的.

以上两种观点哪个是正确的？此带电粒子的合力为水平方向，即解法 2 在水平方向使用了动能定理，而持观点 1 的教师不认同此解法. 两种观点的争论点围绕于是否存在单方向的动能定理“分解式”. 接下来进行理论分析，论证是否存在动能定理的单方向“分解式”.

2　理论分析

动能的大小和速度有关，而速度是矢量，故建立三维直角坐标系 $O-xyz$，如图 2 所示，各方向的单位分矢量为 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$，合力为 F，位移为 s，初速度为 v_1，末速度为 v_2，由矢量的标积，可以计算以下物理量.

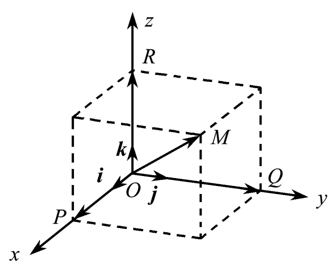

图 2　三维直角坐标系

合力做的功为

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=$$
$$(F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k})\cdot(s_x\boldsymbol{i}+s_y\boldsymbol{j}+s_z\boldsymbol{k})=$$
$$F_x\boldsymbol{i}\cdot s_x\boldsymbol{i}+F_x\boldsymbol{i}\cdot s_y\boldsymbol{j}+F_x\boldsymbol{i}\cdot s_z\boldsymbol{k}+F_y\boldsymbol{j}\cdot s_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}\cdot s_y\boldsymbol{j}+F_y\boldsymbol{j}\cdot s_z\boldsymbol{k}+F_z\boldsymbol{k}\cdot s_x\boldsymbol{i}+F_z\boldsymbol{k}\cdot s_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k}\cdot s_z\boldsymbol{k}=$$
$$F_xs_x+F_ys_y+F_zs_z$$

动能的变化量

$$\Delta E_k=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=$$
$$\frac{1}{2}m(v_{2x}^2-v_{1x}^2)+\frac{1}{2}m(v_{2y}^2-v_{1y}^2)+\frac{1}{2}m(v_{2z}^2-v_{1z}^2)$$

由动能定理：$W=\Delta E_k$，即

$$F_xs_x+F_ys_y+F_zs_z=\frac{1}{2}m(v_{2x}^2-v_{1x}^2)+\frac{1}{2}m(v_{2y}^2-v_{1y}^2)+\frac{1}{2}m(v_{2z}^2-v_{1z}^2)$$

据力和运动的独立性，在 x 方向上

$$\begin{cases}v_{2x}^2-v_{1x}^2=2a_xs_x\\ F_x=ma_x\end{cases}$$

得

$$F_xs_x=\frac{1}{2}mv_{2x}^2-\frac{1}{2}mv_{1x}^2$$

即 $\Delta W_x=\Delta E_{kx}$

在 y 和 z 方向，同理可得

$$F_ys_y=\frac{1}{2}mv_{2y}^2-\frac{1}{2}mv_{1y}^2$$

$$F_zs_z=\frac{1}{2}mv_{2z}^2-\frac{1}{2}mv_{1z}^2$$

即　　$\Delta W_y=\Delta E_{ky}$　　$\Delta W_z=\Delta E_{kz}$；

将 3 方向关系式累加也可得

$$F_xs_x+F_ys_y+F_zs_z=$$
$$\frac{1}{2}m(v_{2x}^2-v_{1x}^2)+\frac{1}{2}m(v_{2y}^2-v_{1y}^2)+\frac{1}{2}m(v_{2z}^2-v_{1z}^2)$$

似乎通过以上的分析，可以证明动能定理具有单方向的“分解式”. 但又存在一个问题，对于等式：$F_xs_x=\frac{1}{2}mv_{2x}^2-\frac{1}{2}mv_{1x}^2$ 中的“$\frac{1}{2}mv_{2x}^2$”和“$\frac{1}{2}mv_{1x}^2$”两项，该如何理解？肯定不能理解初末动能在 x 方向的分量，因为动能是标量，不能矢量分解，不能说物体在某个方向具有多少动能，即 $E_{kx}=\frac{1}{2}mv_x^2$ 是没有物理意义的. 所以我们这里将此动能定理的“分解式”加上引号，表示仅仅是类似于分量形式. 教师在向学生表述此规律时，不能表述为单方向上的动能定理，以防学生错误地认为动能可进行矢量分解，这也是教师的学科核心素养体现.

3　适用条件

通过理论分析，证明了动能定理存在类似于“分量形式”的单方向“分解式”，那此规律存在条件吗？我们以一道例题入手进行分析.

【例 2】质量为 m 的物体静止于地面上，现有两个大小相等且互成 60°的力 $\boldsymbol{F}$ 同时作用于物体，经时间 t 后，物体的速度为 v，求其中一个力做的功.

常规解法：物体做初速度为零的匀加速直线运动，由动能定理

$$W_{总}=\frac{1}{2}mv^2 \tag{5}$$

两个力大小和沿力方向上的分位移大小相同（$\boldsymbol{s}_1=\boldsymbol{s}_2$），如图 3 所示，故两力所做功相同，则每个力做的功

$$W'=\frac{1}{2}w_{总} \tag{6}$$

由式(5)和(6)得

$$W'=\frac{1}{4}mv^2$$

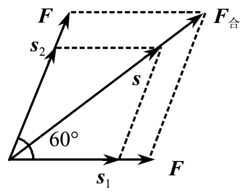

图 3　位移分解

错解:将 v 沿两分力方向分解为 v_1 和 v_2,由图 4 所示,可知

$$v_1=v_2=\frac{\sqrt{3}v}{3}$$

由动能定理的"分解式",一个力做的功为

$$W'=\frac{1}{2}mv_1^2-0=\frac{1}{6}mv^2$$

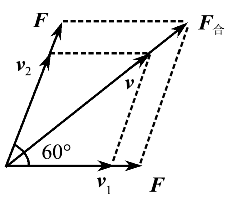

图 4　速度分解

分析:在错解中,似乎运用了动能定理单方向的"分解式",但发现计算结果是错误的,说明动能定理单方向的"分解式"在运用的时候存在条件. 到底是什么条件? 不难发现,之前推导单方向的动能定理"分解式"是建立在直角坐标系的基础上的,如果不是直角坐标系下的分解,而是斜角坐标系下的分解,是否还有相同的结果? 我们运用向量的相关知识进行分析.

情境创设:物体在合外力为恒力 F 的作用下以初速度 v_0 开始做匀加速直线运动,经时间 t 后,位移为 s,末速度为 v.

分析:建立斜角坐标系 xOy,如图 5 所示,其中 x 轴和 y 轴的夹角为 θ,之后将力 $\boldsymbol{F}$ 和位移 $\boldsymbol{s}$ 和速度 v_0,v 按平行四边形定则分解到 x 轴和 y 轴.

对于总功,运用向量求解总功为

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=$$
$$\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{y}+\boldsymbol{F}_2\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{F}_2\cdot\boldsymbol{y}=$$
$$F_1x+F_1y\cos\theta+F_2x\cos\theta+F_2y$$

由此可见,"总功"和"分力的功"也不是简单的标量相加.

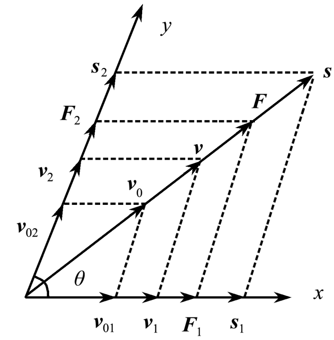

图 5　力、位移和速度分解

对于动能,与速度有关,速度又是矢量,先对速度进行矢量分解,再用向量求解,有

$$v^2=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)\cdot(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)=$$
$$\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_2=$$
$$v_1^2+2v_1v_2\cos\theta+v_2^2$$
$$v_0^2=\boldsymbol{v}_o\cdot\boldsymbol{v}_o=(\boldsymbol{v}_{o1}+\boldsymbol{v}_{o2})\cdot(\boldsymbol{v}_{o1}+\boldsymbol{v}_{o2})=$$
$$\boldsymbol{v}_{01}\cdot\boldsymbol{v}_{01}+\boldsymbol{v}_{01}\cdot\boldsymbol{v}_{02}+\boldsymbol{v}_{02}\cdot\boldsymbol{v}_{01}+\boldsymbol{v}_{02}\cdot\boldsymbol{v}_{02}=$$
$$v_{01}^2+2v_{01}v_{02}\cos\theta+v_{02}^2$$

两边同时乘以 $\frac{1}{2}m$,得

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2+mv_1v_2\cos\theta$$

$$\frac{1}{2}mv_o^2=\frac{1}{2}mv_{01}^2+\frac{1}{2}mv_{02}^2+mv_{01}v_{02}\cos\theta$$

由此可见,"合动能"和类似于分解式的"分动能"并不是简单的标量相加,其运算规则更加的复杂. 综上所述,功和动能的分解规则不是简单的标量合成,且两者的运算规则相同.

由动能定理

$$W=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$F_1x+F_1y\cos\theta+F_2x\cos\theta+F_2y=$$
$$\left(\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2+mv_1v_2\cos\theta\right)-$$
$$\left(\frac{1}{2}mv_{01}^2+\frac{1}{2}mv_{02}^2+mv_{01}v_{02}\cos\theta\right)=$$
$$\left(\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{1}{2}mv_{01}^2\right)+\left(\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_{02}^2\right)+$$
$$(mv_1v_2\cos\theta-mv_{01}v_{02}\ \cos\theta)$$

当时 $\theta=90°$时,有

$$F_1x+F_2y=\left(\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{1}{2}mv_{01}^2\right)+$$
$$\left(\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_{02}^2\right)$$

此时单方向动能定理的“分解式”才能使用，即需建立直角坐标系，将力和速度分解到坐标轴上.

对于单方向动能定理的“分解式”：“$F_x s_x = \frac{1}{2}mv_{2x}^2 - \frac{1}{2}mv_{1x}^2$”和“$F_y s_y = \frac{1}{2}mv_{2y}^2 - \frac{1}{2}mv_{1y}^2$”，不是矢量对应的分量方程，仅是类似于分量形式. 式子中的 F_x 为此直角坐标系中 x 方向的合力，此方向的合力是物体所受各个力在此方向投影的分力之矢量和. 合力和分力的关系为等效替代，也就是产生的作用效果相同，在使用速度位移公式 $v_{2x}^2 - v_{1x}^2 = 2a_x s_x$ 时，a_x 由此方向的合力所产生，此方向的合力应该是建立直角坐标系的基础上，在此方向的分力之和，这才有效果等同，讨论合力和分力才有意义. 同时，对于式子中的“v_{2x}”“v_{1x}”“v_{2y}”“v_{1y}”，是建立直角坐标系的基础上，速度在坐标轴方向的分量.

再回顾例题 2，以其中一个力 $\boldsymbol{F}$ 的所在方向为 x 轴建立直角坐标系，如图 6 所示，其中 F_1，s_1，v_1 分别是力 $\boldsymbol{F}$，位移 $\boldsymbol{s}$，速度 $\boldsymbol{v}$ 在 x 轴上的分量，在 x 轴上运用动量定理的“分解式”，有

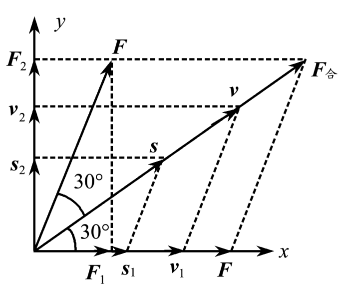

图 6　力、位移和速度分解

$$(F + F_1)s_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$$

又　$F_1 = F\cos 60°$　$s_1 = s\cos 30°$　$v_1 = v\cos 30°$

由以上几式可得：$\sqrt{3}Fs = \frac{1}{2}mv^2$，而运用总的动能定理，$F_{合} = 2F\cos 30° = \sqrt{3}F$，也可得“$\sqrt{3}Fs = \frac{1}{2}mv^2$”，由此可说明动能定理的“分解式”的正确性，但需建立在直角坐标系的基础上才可使用. 回顾例题 1 中的解法 2，建立的是直角坐标系，所以解法 2 是正确的，计算结果和解法 1 的结果相同并不是偶然.

4　案例运用

利用动能定理单方向的“分解式”可以快速解决一些相对复杂的问题，接下来看到以下例题.

【例 3】在水平向右的匀强电场中，如图 7 所示，场强为 3 V/m，一电荷量为 2 C 的小球从 A 点竖直向上抛出. 如图 7 所示，运动轨迹中的 A，B 两点在同一水平线上，M 为轨迹的最高点. 小球抛出时的动能为 8 J，在 M 点的动能为 6 J，不计空气的阻力. 求：

(1)小球水平位移 x_1 与 x_2 的比值；

(2)小球落到 B 点时的动能 E_{kB}；

(3)小球从 A 点运动到 B 点的过程中最小动能 E_{kmin}.

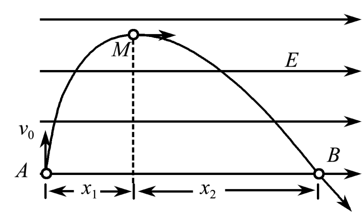

图 7　例 3 题图

解：(1)沿水平和竖直方向建立直角坐标系，如图 8 所示. 在竖直方向，小球受重力，做竖直上抛运动，又 A，B 两点等高，所以 $A \to M$ 和 $M \to B$ 所用时间相同. 在水平方向上，小球仅受电场力，做初速度为零的匀加速直线运动，由初速度为零的匀变速直线运动规律，得 $x_1 : x_2 = 1 : 3$.

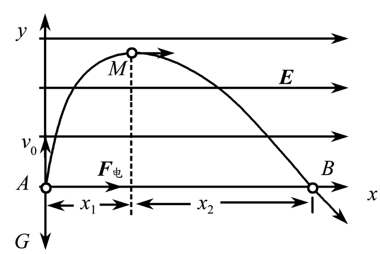

图 8　运动分解

(2)小球从 $A \to M$，M 点为最高点，则 M 点的速度水平，在水平方向上运用动能定理的“分解式”为

$$W_{AM电} = E_{kMx} - E_{kAx}$$

其中

$$E_{kMx} = 6\ \text{J} \qquad E_{kAx} = 0\ \text{J}$$

得 $W_{AM电} = 6$ J.

又 $x_1 : x_2 = 1 : 3$，则

$$A \to B, W_{AB电} = 4W_{AM电} = 24\ \text{J}$$

小球从 $A \to B$，由动能定理，得

$$W_{AB电} = E_{kB} - E_{kA}$$

亚里士多德落体理论究竟错在哪里

——“自由落体”教学中的物理学史辨

高寒萱　刘　政　杨振东

（广西师范大学物理科学与技术学院　广西 桂林　541004）

（收稿日期：2021-05-26）

摘　要：在自由落体运动的教学中，对亚里士多德落体理论的评价长期处于模糊状态，不利于发挥物理学史的育人价值. 通过对“自由落体运动”中物理学史的常见处理方式予以审视并指出不足. 立足于亚里士多德《物理学》原著，从空间观和运动观角度梳理了亚里士多德对自由落体运动的真实观点，并对其作出辩证的评价. 最后，总结了在教学中渗透物理学史的要点.

关键词：自由落体运动　亚里士多德　物理学史教学

近年来随着 HPS（科学史、科学哲学和科学社会学）教育理念的深入，物理学史已然成物理教学中“出镜率”极高的文本素材，在落实科学文化的育人价值中起到积极作用. 然而我们认为，若教师对物理学史的处理方式欠妥，则可能对学生历史观的形成、科学精神的塑造、科学学习观的养成等方面产生负面影响. 当前教学中对亚里士多德“自由落体”理论的批判即存在歪曲解读、简单否定的问题. 有鉴于

又 $E_{kA}=8$ J，得 $E_{kB}=32$ J.

（3）物体从 $A\to M$，设小球所受的电场力为 F，在水平和竖直方向分别运用动能定理的“分解式”，有

$$Fx_1=E_{kMx}-E_{kAx} \tag{7}$$

$$-Gh=E_{kMy}-E_{kAy} \tag{8}$$

其中 $E_{kAx}=0$，$E_{kMy}=0$，得

$$Fx_1=6\ \text{J}\quad Gh=8\ \text{J}$$

又

$$x_1=\frac{1}{2}a_xt^2=\frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 \tag{9}$$

$$h=\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}\frac{G}{m}t^2 \tag{10}$$

由式（7）～（10）得

$$\frac{F}{G}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

由图 9 可知

$$\tan\theta=\frac{F}{G}=\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad \sin\theta=\sqrt{\frac{3}{7}}$$

设电场力和重力的合力为

$$\boldsymbol{F}_{合}=m\boldsymbol{g}'=\boldsymbol{G}'$$

式中 $\boldsymbol{G}'$ 为等效重力，以 $\boldsymbol{G}'$ 所在方向为轴建立直角坐标系，如图 9 所示.

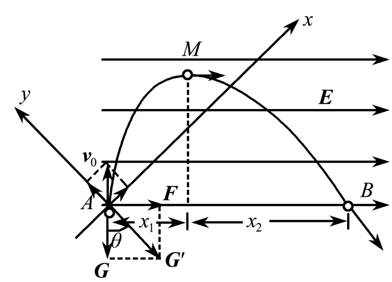

图 9　等效重力场

在小球从 A 到 B 的过程中，将速度分解至坐标轴上，当小球在沿 $\boldsymbol{G}'$ 方向的分速度减为零时，具最小速度为

$$v_{\min}=v_0\sin\theta$$

又

$$E_{k\min}=\frac{1}{2}mv_{\min}^2$$

且

$$E_{kA}=\frac{1}{2}mv_0^2=8\ \text{J}$$

得

$$E_{k\min}=\frac{24}{7}\ \text{J}$$

参 考 文 献

1　王崑屹. 肖井华. 类似“分量形式”的动量定理与动能守恒定律[J]. 物理教学探讨，2013(2)：36

2　杨小利. 动能定理的妙用巧解[J]. 中学物理教学参考，2016(11)：45