



量纲分析法的6个应用案例

卢 婷

(湖州市吴兴高级中学 浙江 湖州 313000)

彭红亮

(浙江省湖州中学 浙江 湖州 313000)

邱为钢

(湖州学院公共教研部 浙江 湖州 313000)

(收稿日期:2021-07-10)

摘 要:对于生活中常见的6个物理现象:彩虹圈下落,肥皂膜破裂,玻璃中裂纹,弯曲光纤,钢尺声音频率,水中鞭炮爆炸,分析其多种物理量,由物理定律得到两个相同量纲的物理量,得到了特征长度、时间和角速度的量纲表达式.由这些现象的真实物理数据,从量级上验证了以上结果.

关键词:生活中的物理 特征长度 量纲分析

量纲法是分析物理现象很重要的一个方法,在文献[1]的序言中提到“一位成熟的物理学家进行探究性的科学研究时,常常从定性的或半定量的方法着手.这包括对称性的考虑和守恒量的利用,量纲分析,数量级估计,极限情形和特例的讨论,简化模型的选取,以至概念和方法的类比……”在物理教学中,也尝试引入量纲分析法.文献[2]和[3]讨论了物理教材上常见物理量的量纲;文献[4]给出了物理竞赛题目中微重力环境下液滴本征振动频率的表示;文献[5]给出了双黑洞引力波辐射功率的估算;文献[6]给出了物理学史上著名的原子弹爆炸当量估算问题.不过,这些文献量纲分析印证举例,生活中很难发现,不能直接验证.所用的方法是待定系数法,不够直接明显.

为了拓展量纲分析的案例,我们额外给出了生活中常见的6个物理现象,便于操作和验证.这些物理现象中存在多个物理量,由物理定律可以组合出两个量纲一样的物理量,譬如能量和力矩,得到特征长度,时间和角速度.这些物理现象的真实数据,则从量级上验证了量纲分析的正确性.

1 彩虹圈下落速度

把彩虹圈拉停在空中,然后释放,你会看到一个很神奇的现象.底端悬空不动,上端下落,如图1所示.

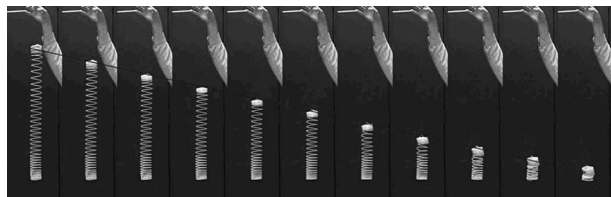


图1 彩虹圈下落

实验和理论都表明^[7],这段时间内彩虹圈的上端是匀速下落的.设彩虹圈原长为 l_0 ,在重力作用下拉伸后的总长度是 l_g .利用中学里最常见的自由落体运动速度公式,猜测上端下落速率为

$$v = \sqrt{2g(l_g - l_0)} \quad (1)$$

非常巧合的是,这个猜测公式与文献[7]理论物理模型给出的表达式是一样的.以这个速率匀速下落的时间是

$$t = \sqrt{\frac{l_g - l_0}{2g}} \quad (2)$$

由文献[8]中的数据,图1中彩虹圈的原长是6.6 cm,重力作用下总长度是114 cm,理论下落时间是2.3 s,实际下落时间是2.7 s.理论和实际下落时间量级上是一致的.

2 肥皂膜破裂速度

把一个圆环浸没在肥皂水中,再小心提出,会形成一个圆形的肥皂膜.用针尖在圆环中心刺一下,高

速摄像机拍摄到了这个圆形肥皂膜的破裂过程,如

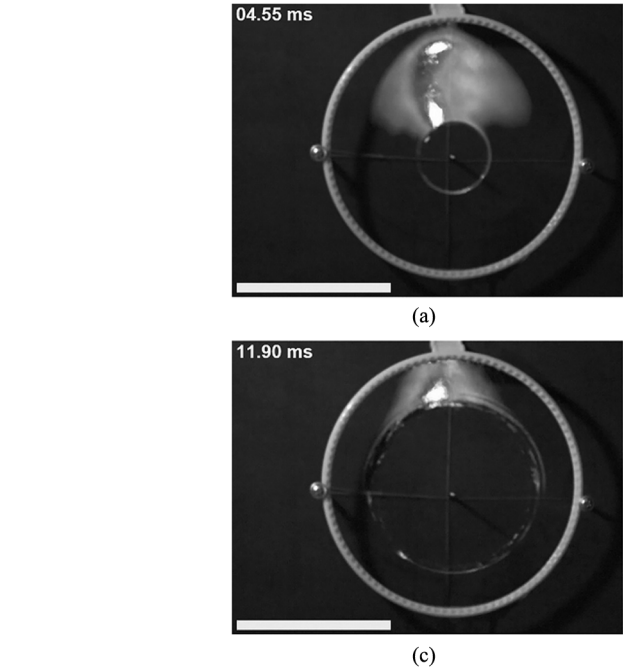


图2 肥皂膜破裂

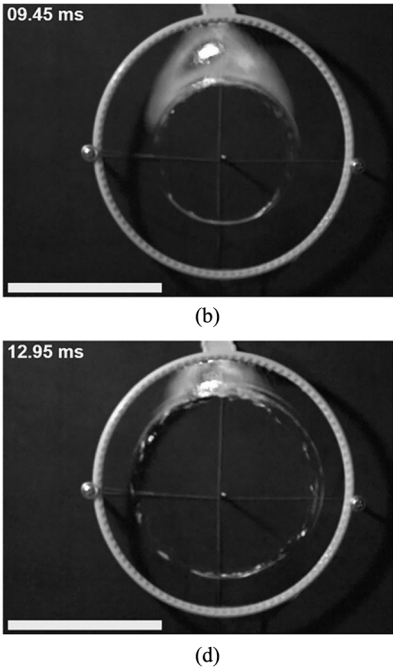
实验和理论都发现,圆环形破裂孔的半径与时间是成正比的,即径向破裂速度是恒定的,文献上称为 Taylor – Culick 定律.从能量角度看,肥皂膜“消失”圆环部分的表面张力势能,转化为这部分的动能,即

$$\sigma A = \frac{1}{2} \rho h A u^2$$

其中 σ 是表面张力系数, A 是圆环部分的面积, h 是肥皂膜的厚度, ρ 是肥皂膜的质量密度.由此得到肥皂膜的破裂速度为

$$u = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho h}} \tag{3}$$

图2所示^[9].



肥皂膜的表面张力系数 σ 约为 $2.5 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$,厚度 h 约为 $10 \text{ }\mu\text{m}$,质量密度 ρ 近似取为水的密度,理论上肥皂膜破裂速度是 $2.2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.由图1中的数据(背景标尺为 10 cm),计算得到实际破裂速度是 $4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,量级上是一致的.

3 玻璃破碎速度

互联网上的优质科普视频博主 The Slow Mo Guys,擅长用高速摄像机拍摄有趣的物理现象.这次,他们把一块长的玻璃片,每隔一英尺区域喷上不同的颜色,记录裂纹穿越每个区域的时间,如图3所示^[10].



图3 玻璃裂纹传播

高速摄像机每秒能拍摄约8万张图片,平均穿越时间约为 2 ms .这样计算得到玻璃裂纹传播速度

是 $1458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.固体中主要有3种波速,第一种是纵向的压缩波,第二种是横向的剪切波,第三种是表

面波,波速依次递减.裂纹传播速度是这 3 种波速的叠加,可以认为量级上与这 3 种波速一样,比例系数近似为 $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{1}{4}$. 纵向的波速与材料的杨氏模量 E 有关.以孙悟空的金箍棒为例,一端固定,另一端施加拉力或压力 F .这个力正比于棒的横截面面积 A 以及棒伸长或压缩量的相对值,即

$$\frac{F}{A}=E\frac{\Delta L}{L}$$

可以看出,杨氏模量 E 和压强具有相同的量纲,单位也是 Pa.从量纲上看,压强乘以体积是能量,与动能的量纲一致,得到

$$EV=\rho Vu^2$$

从量纲上计算得到纵向压缩波的波速为

$$u=\sqrt{\frac{E}{\rho}}\tag{4}$$

玻璃的质量密度 ρ 约为 $2.5\times10^3\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$,杨氏模量 E 是 70 GPa,玻璃中的声速约为 $5\,291\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.取玻璃裂纹传播速度为声速的 $\frac{1}{4}$,理论上为 $1\,322\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$,与实验值 $1\,458\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 接近.

4 光纤极限高度

公园里的光纤挂灯,从侧面看,大部分光纤是弯的,如图 4 所示.



图 4 光纤挂灯

从能量角度看,光纤完全直立,重力势能最高,弯曲弹性势能最低.光纤弯下去,重力势能低,弯曲弹性势能高.真实的弯曲光纤,使得重力势能和弯曲弹性势能加起来极小.从物理上看,是相对最稳定的位形.取下一根光纤,上部剪掉一段,看看能不能完全直立.如果不行,再剪一小段.直到一个极限长度,超过这个长度一点点,竖起来是弯的;低于这个长度一点点,竖起来是直的.那么,这个极限长度与光纤的哪些物理量有关?

物理学史上,是欧拉和伯努利首先提出单位长度上的弯曲弹性势能与杆曲率平方成正比,比例系数是弯矩 B .对于特征长度为 l_0 的光纤,曲率反比于 l_0 .单位长度上的弯曲弹性势能和重力势能,量纲都是能量的量纲,量级上可以等起来,得到

$$\rho gl_0=\frac{B}{l_0^2}$$

其中 ρ 是光纤的线质量密度.由此计算得到特征长度为

$$l_0=\left(\frac{B}{\rho g}\right)^{\frac{1}{3}}\tag{5}$$

严格的理论分析发现,临界长度近似为这个特征长度的 2 倍.实验测量到的光纤长度为 15 cm,质量是 0.02 g.极限长度是 13 cm,特征长度是 6.5 cm,由此得到光纤弯矩实验值约为 $360\text{ g}\cdot\text{cm}^2\cdot\text{s}^{-2}$.塑料光纤的杨氏模量 E 约为 0.01 GPa,光纤半径 r 约为 0.5 mm.由弹性理论,弯矩 B 正比于杨氏模量 E 和半径 r 的 4 次方,约为 $625\text{ g}\cdot\text{cm}^2\cdot\text{s}^{-2}$,与实验值量级一致.

5 钢尺声音频率

河南焦作市第十一中学的张怀华老师,实验发现钢尺一端固定振动发出声音的频率(主频)与钢尺的长度平方成反比^[11],实验装置如图 5 所示.



图 5 钢尺发声

如横轴单位是 mm,纵轴单位是 Hz,那么比例系数是 68 619.如何说明这个关系?把钢尺看作杆,由弹性力学的欧拉-伯努利线性梁(杆)理论,杆的弯矩 B 是杨氏模量 E 和横截面矩 $I=\frac{\omega^3 d}{12}$ 的乘积,其中 ω 是厚度, d 是宽度.从能量角度看,单位长度上钢尺的动能,量级上与钢尺的弯曲弹性势能相等.钢尺的速率正比于钢尺的长(高)度 H 与钢尺振动频率 ω 的乘积.由此得到

$$\rho\omega d\left(H\omega\right)^2=\frac{1}{12}\frac{E\omega^3 d}{H^2}$$

其中 ρ 是钢的密度. 忽略常数因子 $\frac{1}{12}$, 计算得到振动频率 ω 与钢尺长度 H 的平方成反比

$$\omega = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{w}{H^2} \tag{6}$$

不锈钢的杨氏模量 E 约为184 GPa, 密度 ρ 约为 $7.9\text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$, 厚度 w 约为0.5 mm. 横轴单位以mm计的话, 比例系数约为 2.4×10^6 . 理论近似分析, 基频还需要乘以 $\frac{1}{4}$, 约为 6×10^5 , 与实验比例系数68 619接近.

6 气泡塌缩时间

点燃小鞭炮后马上扔进水里, 你会看到水里火光一闪, 水面上溅起水花. 整个过程很快, 一般在10 ms左右, 人眼根本看不清楚. 视频科普博主 The Slow Mo Guys, 用每秒可以拍摄28万张图片的高速摄像机, 看到了鞭炮在水中爆炸, 形成的气泡膨胀到最大半径然后收缩的过程, 如图6所示.



图6 水中小鞭炮爆炸产生的气泡随时间的演化

理想球形气泡在水中塌缩过程, 最早由英国物理学家瑞利所研究. 从能量考虑, 气泡完全塌缩后, 液体内部压强压缩气泡做的功, 量级上等于同等体积液体获得的动能, 即

$$\rho V = \rho V u^2$$

其中 u 是气泡塌缩速度, 这个速度与液体中的声速量级一致. 气泡最大半径 R_0 . 除以这个速度, 就是气泡塌缩时间

$$T = \frac{R_0}{\sqrt{\frac{p}{\rho}}} \tag{9}$$

已知水中声音速度约为 $1\,500\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, 图6中气泡最大半径估计为10 cm, 那么塌缩时间约为66 μs . 每秒28万帧图片的时间间隔是3.5 μs , 气泡塌缩过程图片接近20帧, 约为70 μs . 这两个时间接近, 说明估算在量级上, 还是合理的.

7 结束语

物理学习时期(中学和大学), 最多只有4年. 在此之后, 估计绝大多数的人, 再也不会和物理见面. 我们希望给学生带来物理真正的精髓, 物理不仅是有趣的, 也是有用的. 就像文献[12]中蓝可回忆她导师于敏先生在探索氢弹爆炸机制时, 所展现的物理能力之三“抓住关键物理量, 进行理论初估算”. 相比于敏先生“太阳般”光辉的量纲分析和量级计算, 本文只能算“萤火之光”, 抓住生活中6个有趣的物理现象, 来展现常规物理考试中不会考到的物理知识.

参考文献

1 赵凯华. 定性性与半定量物理学(第2版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008. 4

2 周栋梁. 引入量纲分析提升探究水平[J]. 物理教师, 2006, 27(7): 15 ~ 16

3 赵金土, 周品矛. 量纲分析与物理新发现[J]. 物理教学, 2014, 36(6): 72 ~ 74

4 许小涛. 赏析两道“量纲分析”的竞赛复赛试题[J]. 物理教师, 2015, 36(10): 94 ~ 95

5 何孝凯, 曹周健, 梁灿彬. 量纲分析在引力波物理中的应用[J]. 大学物理, 2019, 38(5): 1 ~ 4

6 孙博华. 量纲分析以及应用[J]. 物理与工程, 2016, 26(6): 11 ~ 20

7 邱为钢. 弹簧端点的运动模式[J]. 大学物理, 2014, 33(12): 12 ~ 14

8 CrossR C, Wheatland M S. Modeling a falling slinky[J]. American Journal of Physics, 2012, 80(12): 1 051 ~ 1 060

9 Arseny A. Volodko, Alexander E. Dubinov. High-speed visualization of soap films bursting dynamics[J]. American Journal of Physics, 2021, 89(3): 253 ~ 260

10 见证玻璃破碎的速度 [EB/OL]. <https://zhuanlan.zhihu.com/p/114475532>

11 张怀华. 探究拇指琴与钢尺振动规律不一致的原因 [EB/OL]. https://mp.weixin.qq.com/s/Co99EpBBvs_hCxcXyPjAJuA

12 蓝可. 我的导师于敏[J]. 现代物理知识, 2015, 27(1): 16 ~ 19