

# 正确理解相对论中的时间膨胀公式及其适用条件

——对常文利主编《大学物理教程》中一道易错题的反思

王瑞珍

(西安汽车职业大学理学院 陕西 西安 710600)

蔡志东

(镇江高等专科学校丹阳师范学院 江苏 镇江 212310)

(收稿日期:2021-07-22)

**摘要:**洛伦兹变换是狭义相对论的基础,然而,在实际教学中,笔者发现初次接触相对论的大学生,对洛伦兹变换及其推论之一的“钟慢”效应理解不深,没有注意其适用条件,而是乱套公式.以一道易错题为例,剖析了学生错解的原因,阐明了固有时和坐标时的区别以及时间膨胀公式的适用条件,同时还指出了“相对速度”的两种不同理解以及它对时间计算的影响.

**关键词:**狭义相对论 洛伦兹变换 时间膨胀公式 适用条件 相对速度

1904年,狭义相对论诞生“前夜”,荷兰莱顿大学的物理学家亨德里克·安东·洛伦兹(1853—1928)为了解释迈克尔孙-莫雷实验(1887年)的“零结果”(即测不到地球相对于“以太”参考系的运动速度),提出了洛伦兹收缩的概念(物体沿运动方向会发生实质性收缩)以及相应的时空变换公式——洛伦兹变换,该变换式是狭义相对论的基础.

与洛伦兹为了解释实验现象而拼凑公式不同,爱因斯坦根据两条基本原理(狭义相对性原理和光速不变原理)建立了系统的相对论<sup>[1]</sup>.其运动学部分主要包括洛伦兹变换公式以及它的一系列重要推论,如“尺缩钟慢”效应等.但是,初次接触相对论的学生,由于理解不深,往往只会乱套公式,而不会根据实际情况灵活应用.

为了解决这一教学困境,笔者以一道易错题为例,剖析了学生错解的原因,阐明了固有时和坐标时的区别以及“时间膨胀”公式的适用条件,指出了“相对速度”的两种不同理解以及它对时间计算的影响,希望能给其他高校物理教师一些启示,以提高大学物理的教学质量.

## 1 一道简单的相对论习题及其错误解答

原题摘自文献[2],为便于分析讨论,现将题目

叙述如下.

**【原题】**固有长度为 $L$ 的火箭,相对地面竖直向上做速度为 $v_1$ 的匀速直线运动,火箭后端发射了一相对火箭速度为 $v_2$ 的子弹,方向指向火箭前端.问在地上测得子弹从射出到击中火箭前端靶子的时间间隔<sup>[2]</sup>.

**学生错解:**火箭为 $S'$ 系

$$T_0 = \frac{L}{v_2}$$

地面为 $S$ 系

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} =$$

$$\frac{\frac{L}{v_2}}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = \frac{L}{v_2 \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \quad (1)$$

**评注:**学生的这个解答过程主要是依据狭义相对论的一个结论,即时间膨胀公式

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

该式中的 $\Delta t$ 为(地面静止惯性系中的观察者测出的)坐标时, $\Delta \tau$ 为(相对于地面做匀速直线运动的惯性系中的观察者测出的)固有时.但是,不少学生并

不知道这个公式的适用条件,只是机械地乱套公式,从而得出了这个错误结论.为了从源头上分析其错误的原因,我们要先从洛伦兹变换讲起.

## 2 洛伦兹变换及其适用条件

设有一个质点(或某种波的波阵面上的一个点),它在静止惯性系  $S$  中的时空坐标为  $(x, y, z, t)$ ,在(相对于  $S$  做速度为  $v$  的匀速直线运动的惯性系)  $S'$  中的四维时空坐标为  $(x', y', z', t')$ ,则根据狭义相对论的两条基本原理可得洛伦兹变换式(2),两边同取  $\Delta$ (也可取微分  $d$ ),可得爱因斯坦-洛伦兹变换式(3).把速度  $v \rightarrow -v$ ,带撇和不带撇的4个坐标交换位置,可得洛伦兹逆变换和爱因斯坦-洛伦兹逆变换.洛伦兹变换式(2)表明了同一个质点在两个惯性系中的时空坐标关系,而爱因斯坦-洛伦兹变换式(3)表明了两个事件之间(或一个运动质点所经历)的时间间隔和空间间隔之间的关系<sup>[3]</sup>.在实际应用中,式(3)更为常用.

$$\begin{cases} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \\ \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (3)$$

## 3 爱因斯坦-洛伦兹变换的推论

### 3.1 “尺缩钟慢”效应

#### 3.1.1 时间膨胀——钟慢公式

式(3)中的最后一式即

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

其逆变换为

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4)$$

此式中的  $\Delta t, \Delta t'$  分别为  $S, S'$  系中的观察者测出的坐标时间,它表示一个物体沿着  $x(x')$  轴从  $A$  点运动到  $B$  点所经历的时间间隔,由于(异地)同时的相对性以及运动对物质属性的影响等原因,导致测出的结果一般是不同的.无论物体相对于  $S'$  系是运动还是静止,式(4)都适用.  $\Delta x'$  为  $S'$  系中测出的物体的运动距离.

如果一个物体相对于  $S'$  系(或固定于  $S'$  系中的原点  $O'$  的一只钟)是静止的,那么,它所经历的时间就叫做固有时,通常用  $\Delta\tau$  来表示.简单一点,一只钟与物体相对静止,这个钟所测出的该物体所经历的时间叫做固有时,一只钟与物体相对运动,这个钟所测出的该物体所经历的时间叫做坐标时.固有时是真实的、客观的,它在任何惯性系中都相同(是一个洛伦兹不变量).而坐标时,因为物体和钟(或观察者)相对运动,它是可变的,与相对速度有关.

根据固有时的定义可知,如果在式(3)中令  $\Delta x' = 0$ (物体固定于  $S'$  系中的一点),则此时测出的  $\Delta t'$  即为固有时(等于  $\Delta\tau$ ),于是有

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5)$$

式(5)即为时间膨胀——钟慢公式.时间膨胀是针对  $S$  系中的钟而言的,因为在  $S$  系中的观察者看来,他的钟所测出的时间比  $S'$  系中的钟所测出的时间要长,时间似乎膨胀了.钟慢是针对  $S'$  中的钟而言的,因为该钟计时比  $S$  系中的钟少,所以它似乎走慢了(钟走得慢,计时才会少).再强调一遍,式(5)成立的前提条件是物体相对于  $S'$  系静止.

#### 3.1.2 “尺缩”公式

先讲一下固有长度,当一个物体与观察者相对

静止时,该观察者所测出的长度即为固有长度,通常用  $L_0$  来表示.固有长度也是一个洛伦兹不变量,在任何惯性系中都相同.一个物体如果与观察者相对运动,则该观察者所测出的长度即为运动长度(动长),测动长时有一个基本要求,即测量工具的左右两端必须同时和物体的左右两端接触(即  $\Delta t = 0$ ),否则因为物体在运动,测出来的就不是物体的长度而可能是该物体的运动距离.假设这个物体为一根棒,沿着  $x(x')$  轴放置并静止于  $S'$  系中,则  $S'$  系的观察者测量该物体的长度时,并不要求测量工具的两端与该物体的两端同时接触(即使他先把卷尺的一端与该物体的左端接触,过一段时间再把卷尺的另一端与物体的右端接触,测出的仍然是物体的长度,即  $\Delta t'$  是否为零无所谓).在式(3)中的第一式

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t = 0 \quad \Delta x' = L_0 \quad \Delta X = L$$

可得动长  $L$  和静长  $L_0$  之间的关系式

$$L_0 = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

或

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (6)$$

因为  $L < L_0$ ,即运动物体的长度总是小于静止物体的长度,所以把式(6)叫做“尺缩”公式.“尺缩”一词容易使人产生误解,使人错误地认为,是卷尺发生了收缩而物体没有收缩,如果是这样,那测出的结果将变大而不是变小,这是错误的,“尺缩”改成“物缩”更好.

### 3.2 速度变换公式

根据速度的定义可知

$$u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \quad u'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'}$$

$$u'_z = \frac{\Delta z'}{\Delta t'} \quad u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$u_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad u_z = \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

$$u' = (u'_x, u'_y, u'_z)$$

$$u = (u_x, u_y, u_z)$$

分别为  $S'$  系和  $S$  系中的观察者测出的同一物体的速度.根据式(3)和速度的定义,立即可得相对论速度变换公式<sup>[4]</sup>

$$\begin{cases} u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \\ u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \\ u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \end{cases} \quad (7)$$

除了“尺缩钟慢”和速度变换公式之外,还有加速度变换公式等,这里暂且不谈.

## 4 一道简单的相对论习题的正确解答

### 4.1 对“相对速度”的第一种理解及第一个正确答案

原题中说,子弹相对于火箭的速度为  $v_2$ ,但是题目中没有讲清楚,这个“相对速度”究竟是火箭惯性系  $S'$  中的观察者测出的还是地面惯性系  $S$  中的观察者测出的?现在我们假定是第一种情况,即相对速度  $v_2$  是火箭惯性系  $S'$  中的观察者测出的,此时,显然有

$$\Delta t' = \frac{\Delta x'}{v_2} = \frac{L}{v_2}$$

其中的  $\Delta x' = L$  为子弹从火箭尾部到前端运动的距离即火箭的固有长度.

代入式(4)并注意  $v = v_1$  得

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \left( \frac{L}{v_2} + \frac{v_1 L}{c^2} \right) \quad (8)$$

### 4.2 对“相对速度”的第二种理解及第二个正确答案

如果子弹相对于火箭的速度  $v_2$  不是火箭上的

观察者测出的(由于火箭是密闭的,它里面的观察者实际上很难测出火箭外面子弹的速度)而是地面观察者测出的(他是很容易测出的),那么,此时地面观察者测出的火箭的长度是运动长度

$$L_{\text{动长}} = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = L \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}$$

子弹从火箭尾部运动到前端的时间为

$$\Delta t = \frac{L_{\text{动长}}}{v_2} = \frac{L \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}{v_2} \quad (9)$$

式(8)、(9)两个答案都是正确的,因为相对速度有两种不同的理解,所以有两个答案.

笔者要提醒大家注意的是,原题中“固长”(固有长度)用  $L$  来表示是非常不恰当的,几乎所有的权威相对论专著中, $L$  都表示运动长度而非静长或固长(用  $L_0$  表示固长),原题中的做法极易使人混淆概念.

## 5 原题中存在的问题及出题时应注意的事项

首先,该题目完全脱离实际.在火箭的尾部搞一个子弹发射装置,前端搞一个靶子,只有傻瓜才会这样做.为了减少阻力,火箭的外部最前面是圆锥形,后面是圆柱形,而且表面比较光滑,在火箭的前端搞一个子弹的靶子,是比较荒唐的行为.

其次,出题者基本是胡编乱造.一般而言,子弹的速度没有火箭的速度快,子弹是追不上火箭的,当然,如果你在火箭的尾部搞一个发射装置,那子弹总是可以跑得比火箭快的,问题在于,在火箭上升过程中,它是做加速运动,此时不能作为惯性系看待.退一万步,即使在某一段时间内,火箭可以近似看做匀速运动,但是子弹做竖直上抛运动,绝对不能作为匀速运动(任何一个高中生都知道),你把子弹实际的减速运动看做匀速运动,所导致的时间计算上的误差,将远远大于相对论效应,这个题目将变得毫无意义.

第三,题意不清.题目中,子弹相对于火箭的速度  $v_2$  究竟是火箭惯性系  $S'$  中的观察者测出的,还是地面惯性系  $S$  中的观察者测出的? 没有明确指出,

这是一个致命的问题.

在多数相对论专著中,一般是选地面惯性系为  $S$  系,相对于地面做匀速运动的火车惯性系为  $S'$  系,也可选择远离天体的两个匀速运动的飞船来讨论,其中一个飞船甲可以看做  $S$  系,另一个相对于它做匀速运动的飞船乙为  $S'$  系,这样讨论问题比较合理.题目中要明确指出,火车(或飞船乙)中的观察者测得车内(或飞船乙内部)物体相对于它的速度为  $u'$ ,然后问  $S'$  系和  $S$  系中的观察者测得运动时间分别是多少;切不可脱离实际,胡编乱造.

## 6 主要结论

(1) 时间膨胀或钟慢效应是相对论的一个重要结论,但是,要注意公式(5)的适用条件,只有物体相对于  $S'$  系静止时才可以用,如果物体相对于  $S'$  系是运动的,则必须用一般的逆变换式(4).

(2) 出题时务必注意其合理性,不能完全脱离实际胡编乱造,即使是想象,也要有一定的合理性.

(3) 题意一定要清楚,不能似是而非,模棱两可.尤其是相对速度,一定要讲明是哪个惯性系中的观察者测出的,否则,初学者无从下手.

(4) 不要眉毛胡子一把抓,要分析学生犯错的直接原因而非间接原因:子弹从发出到击中靶子,这两个事件原本就不同时,而击中靶子是一个客观事实,在两个惯性系中是一致的,子弹运动时间上的差异与“同时的相对性”并无直接关系,主要是  $S'$  系中的钟走得较慢导致的.

## 参考文献

- 1 姚梦真,冯杰,蔡志东.狭义相对论诞生的历史背景及其核心与启示[J].物理通报,2020(12):2~7,12~13
- 2 常文利.大学物理教程[M].上海:上海交通大学出版社,2014.310
- 3 蔡志东.对洛伦兹变换的误解引发的问题及解决方案[J].南京晓庄学院学报,2011(6):32~36
- 4 韩奎,王伟华,陆万利.电动力学[M].北京:化学工业出版社,2021.186

(下转第136页)

摩擦力就足够大;或者说,只要静摩擦因数足够大,物体就始终不发生滑动.这种观点显然是错误的,但却有一定的迷惑性,因此很容易诱发错题与错解的出现.

综上所述,原题的设问与条件不自洽,需进行修正,有多种修改方法,既可改变条件,如把原题中的“杆与地面间的静摩擦因数足够大”替换为“杆下端放入浅槽内不能滑动”;也可改变设问,把原题中的1个设问替换为新拓展的3个设问.此外,杆的长度 $2a$ 可改为 $2b$ ,以免在解题时用到的字母与加速度符号雷同.

### 3 总结与启示

通过对原题进行修正或改编,可形成若干优质试题,具有一定的教学价值,既可作为大学物理复习资料,也可用于高中物理竞赛训练.

虽然原题及其解答的错误起因于“静摩擦因数足够大”,但这个条件本身没有错,从修改原题设问的角度而言,在原题中给出这个条件是必要的,以此表明在静摩擦力从最大值减小为零之前,杆不会发

生滑动,为试题的改编与解答准备了条件.但若根据这个条件默认为杆始终不发生滑动则是错误的,或者说,对于如何保证杆始终不发生滑动,题中所设定的条件不合乎实际,由此导致试题的设问与条件不自洽.

因此在编拟试题时,不仅要体现试题的基础性、综合性、应用性和创新性,更要遵循科学性与自洽性的原则,这就需要在编题过程中对试题的背景、情境、赋值、条件和设问等方面进行反复推敲和严格论证,确保其规范合理,严谨周密,不存在科学性错误.

在教学或者教研过程中,无论选题或答题都需谨慎,避免出现错题或错解.还要提倡学术争鸣,敢于质疑,善于发现并且及时纠正错误,对于那些比较隐蔽的、或者是勉强默认的、甚至是广为流传的错误,有必要进行深入剖析,以正本清源.若能充分利用错题资源,变废为宝,将有助于对相关知识的确切理解和正确应用,更有利于提升学科核心素养.

#### 参考文献

- 1 陈廷国,李忠相.静摩擦因数足够大的一种临界“陷阱”[J].物理教学,2019,41(8):57~59

(上接第39页)

## Correctly Understanding Time Dilation Formula

## in Special Relativity Theory and Its Applicable Conditions

—Reflecting on an Easily Mistaken Question in *College Physics Course* Edited By Chang Wenli

Wang Ruizhen

(College of Science, Xi'an Vocational University of Automobile, Xi'an, Shaanxi 710600)

Cai Zhidong

(Danyang Normal University, Zhenjiang College, Zhenjiang, Jiangsu 212300)

**Abstract:** Lorentz Transformation is the basis of theory of special relativity. However, the authors found that freshmen who firstly came with theory of special relativity often rigidly duplicated the time dilation formula, regardless of the applicable conditions of time dilation formula. This article takes an error-prone question as an example, analyzes the reasons for students' misunderstandings, and clarifies the difference between inherent time and coordinate time. Meanwhile, we also point out two different understandings of "relative velocity" and its influence on time calculation. It is worth looking forward to the result that students can thoroughly discriminate the applicable conditions of time dilation formula.

**Key words:** theory of special relativity; Lorentz Transformation; time; dilation formula; applicable conditions; relative velocity