两种不同形式的椭圆运动之规律初探

郑　金

（凌源市职教中心　辽宁 朝阳　122500）

（收稿日期：2021－07－24）

摘　要：对两种不同性质的有心力作用下的椭圆运动所遵循的规律从多方面进行论证、归纳和总结，对有关椭圆运动的两个物理问题进行巧妙解答.

关键词：有心力　椭圆运动　力心位置　运动转折点　周期

若质点在有心力的作用下沿椭圆轨道运动，则有两种运动形式，一种是力心位于椭圆的一个焦点，运动具有单轴对称性；另一种是力心位于椭圆的中心，运动具有双轴对称性，即中心对称性. 虽然运动轨迹形状相同，但在各方面所遵循的规律却不尽相同. 下面从力心的位置和运动的周期这两个方面进行论证.

1　规律论证

1.1　判断力心在椭圆中的位置

如果力心位于椭圆的一个焦点，可知径向运动有两个转折点；如果力心位于椭圆的中心，可知径向运动有 4 个转折点，因此可从径向运动转折点的个数来判断力心所在的位置. 对于质点在不同形式的有心力作用下的椭圆运动，力心的位置不同，下面分别进行论证.

（1）若物体在万有引力的作用下绕星球做椭圆运动，则有心力为平方反比力，即 $F(r)=\dfrac{GMm}{r^2}$，以无穷远处为势能零点，可知在极坐标系中的有效势能为[1]

$$U_{\text{eff}}=\frac{L^2}{2mr^2}-G\frac{Mm}{r}$$

在径向运动的转折点处，由于径向速度为零，则径向动能为零，此时有效势能等于总能量，即

$$\frac{L^2}{2mr^2}-G\frac{Mm}{r}=E$$

由此可得关于距离 r 的一元二次方程为

$$Er^2+GMmr-\frac{L^2}{2m}=0$$

由于以无穷远处为引力势能的零点，则总能量 $E<0$，利用求根公式可知该方程有两个不同的正根，表明径向运动的转折点有两个，因此力心位于椭圆的一个焦点，那么只有长轴的两个端点是径向运动的两个转折点. 实际上，开普勒第一定律反映了行星在平方反比力作用下运动轨道的形状以及力心所在的位置.

（2）如果物体在线性正比力的作用下绕力心做椭圆运动，那么有心力可表示为 $F(r)=kr$. 若以力心为势能零点，则径向有效势能为

$$U_{\text{eff}}=\frac{L^2}{2mr^2}+\frac{1}{2}kr^2$$

径向运动转折点的位置满足方程

$$\frac{L^2}{2mr^2}+\frac{1}{2}kr^2=E$$

由此可得关于距离 r 的一元四次方程为

$$\frac{1}{2}kr^4-Er^2+\frac{L^2}{2m}=0$$

由于以力心为线性引力势能的零点，则总能量 $E>0$，利用求根公式可知该方程有 4 个根，是两对互为相反数，考虑到椭圆的特殊对称性，猜想径向运动的转折点有 4 个，由此推断力心位于椭圆的中心.

由于椭圆的两个顶点处的曲率半径 ρ 相等，则由牛顿第二定律有 $kr=\dfrac{mv^2}{\rho}$，可知 $v^2\propto r$；另一方面，由于角动量守恒，则矢径扫动的面积速率恒定. 假设力心位于椭圆的一个焦点，由 $v^2\propto r$ 可知，若某个顶点对应的 r 较大，则物体在该顶点运动的速率较大，那么面积速率更大，因此两个顶点对应的矢径扫动的面积速率不相等，这与实际不符，则假设不成

立. 所以,力心位于椭圆的中心,那么长轴的两个端点和短轴的两个端点是径向运动的 4 个转折点.

总之,受力情况决定运动形式,若有心力为平方反比引力,则力心位于椭圆轨道的一个焦点;若有心力为线性正比引力,则力心位于椭圆轨道的中心.

1.2　推导椭圆运动的周期公式

在运动轨迹的顶点附近取一小段弧线,设其长度为 s,到力心的距离为 r,则对应小扇形的面积为 $\Delta S=\dfrac{1}{2}sr$,在这很短的时间内,可视为匀速率运动,则弧长 $s=v\Delta t$,可知面积速率为 $S'=\dfrac{\Delta S}{\Delta t}=\dfrac{1}{2}rv$. 质点在圆锥曲线顶点处的角动量为 $L=mvr$,则面积速率为

$$S'=\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{L}{2m}$$

正是由于质点在有心力作用下运动的角动量守恒,因此面积速率恒定. 而开普勒第二定律只是角动量守恒定律的一种形式和体现,即只有在有心力作用下的曲线运动,矢径在单位时间内扫过的面积才恒定. 只要算出椭圆的面积和矢径扫动的面积速率,即可求出椭圆运动的周期,这是最一般化的方法. 对于质点在不同性质的有心力作用下的椭圆运动,计算周期还有特殊方法,下面分别推导两种情况下的周期公式.

(1) 若物体在万有引力的作用下绕星球做椭圆运动,则有心力为平方反比力,即 $F(r)=\dfrac{GMm}{r^2}$.

设椭圆的半长轴为 a,半短轴为 b,力心位于椭圆的焦点,设长轴的两个端点到力心的距离分别为 r_A 和 r_B,对于物体从椭圆长轴的一个端点运动到另一个端点的过程,由角动量守恒定律有

$$mv_A r_A=mv_B r_B$$

以无穷远处为势能零点,由机械能守恒定律有

$$\frac{1}{2}mv_A^2-G\frac{Mm}{r_A}=\frac{1}{2}mv_B^2-G\frac{Mm}{r_B}$$

两个方程联立可得

$$v_A=\sqrt{\frac{2GMr_B}{(r_A+r_B)r_A}}=\sqrt{\frac{GMr_B}{ar_A}}$$

则面积速率为

$$S'=\frac{1}{2}r_A v_A=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM}{a}r_A r_B}$$

由于 $b^2=r_A r_B$,因此

$$S'=\frac{b}{2}\sqrt{\frac{GM}{a}}$$

考虑到椭圆的面积为 $S=\pi ab$,可知质点沿椭圆运动的周期为

$$T=\frac{S}{S'}=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

周期公式变形为 $\dfrac{T^2}{a^3}=\dfrac{4\pi^2}{GM}=C$,$C$ 为与 M 有关的常数,这就是开普勒第三定律的表达式.

由开普勒第三定律的表达式 $\dfrac{T^2}{a^3}=C$ 可知,对于同一性质的有心力,周期只与椭圆的半长轴有关,而与椭圆的离心率无关,因此半长轴为 a 的椭圆运动的周期等于以 a 为半径的匀速圆周运动的周期.

(2) 如果物体在线性正比力的作用下绕力心做椭圆运动,则有心力可表示为 $F(r)=kr$,因此力心位于椭圆的中心,则在长轴端点和短轴端点处对应的矢径与瞬时速度方向垂直,而且矢径的长度分别为半长轴 a 和半短轴 b,对于质点从椭圆长轴端点运动到短轴端点的过程,由角动量守恒定律有

$$mv_A a=mv_B b$$

以椭圆中心为势能零点,由机械能守恒定律有

$$\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}ka^2=\frac{1}{2}mv_B^2+\frac{1}{2}kb^2$$

两个方程联立可得

$$v_A=b\sqrt{\frac{k}{m}}$$

则面积速率为

$$S'=\frac{1}{2}av_A=\frac{1}{2}ab\sqrt{\frac{k}{m}}$$

考虑到椭圆的面积为 $S=\pi ab$,可知质点沿椭圆运动的周期为

$$T=\frac{S}{S'}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

这表明,质量为 m 的质点在线性力作用下做椭圆运动的周期等于该质点以线性力系数 k 为劲度系数的弹簧振子做简谐运动的周期. 简谐运动的周期公式也可变形为类似于开普勒第三定律表达式的形式,由此可知,对于线性正比力作用下的周期性运动,周期只与质点的质量有关,而与椭圆的离心率无关(可以为 1 或 0),但要注意变量 r 是质点到力心的距离.

总之,质点在平方反比力作用下沿椭圆运动的

周期遵循开普勒第三定律，在线性正比力作用下沿椭圆运动的周期等于质点以该力为回复力做简谐运动的周期或以该力为向心力做圆周运动的周期.

2　规律应用

可直接利用上述规律来解答有关的物理问题.

【例 1】在自由的空间中，半径为 R_0 的圆的内接正方形的顶点上各有一个质量为 m 的质点，其中两个带电荷量为 $+q$，另外两个带电荷量为 $-q$，如图 1 所示. 刚开始，这些质点沿着圆的切线以相同的速率顺时针运动. 已知在运动过程中，任何一个质点到圆心的最短距离都是 R_1($R_1 < R_0$). 设任意时刻电荷都位于以 O 为中心的正方形的 4 个角，重力的影响忽略不计. 求：(1) 每个粒子的运动轨迹是什么样的？(2) 一个粒子从初始位置运动到距离圆心为 R_1 的位置所需的时间是多少[2]？

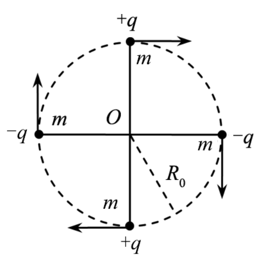

图 1　例 1 题图

解析：(1) 设粒子在任意位置时到 O 点的距离为 r，以指向圆心为正方向，每个粒子受到的库仑力为

$$F = 2 \times \frac{kq^2}{(\sqrt{2}r)^2}\cos 45° - \frac{kq^2}{(2r)^2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4}\right)\frac{kq^2}{r^2}$$

由于该值大于零，表明力的方向指向圆心，即每个粒子都受到有心力的作用，而且力跟距离的平方成反比，类似于万有引力，又由于初速度与作用力方向垂直，并且粒子到圆心的距离存在最小值，因此粒子的运动类似于行星的运动，所以每个粒子的运动轨迹都是椭圆，如图 2 所示.

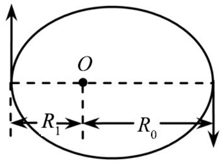

图 2　粒子的运动轨迹

(2) 由于有心力是平方反比力，而且力心的位置固定不动，因此力心位于椭圆的一个焦点，并且粒子沿椭圆运动的周期遵循开普勒第三定律. 由此可知椭圆运动的周期等于以半长轴 a 为半径的匀速圆周运动的周期，可根据牛顿第二定律列出方程

$$F = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4}\right)\frac{kq^2}{a^2} = ma\omega^2$$

由此得

$$\omega^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4}\right)\frac{kq^2}{ma^3}$$

椭圆的长轴为 $2a = R_0 + R_1$，可知粒子运动的周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2q}\sqrt{\frac{(R_0 + R_1)^3 m}{\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)k}}$$

每个粒子从初位置运动到距离圆心为 R_1 的位置经历半个椭圆，因此所需的时间为半个周期，即

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{q}\sqrt{\frac{(R_0 + R_1)^3 m}{(4\sqrt{2} - 2)k}}$$

点评：解题关键是推导每个粒子受到的库仑力的表达式，一方面可利用有心力的性质判断粒子的运动轨迹为椭圆，而且力心位于椭圆的一个焦点；另一方面可作为匀速圆周运动的向心力列方程.

【例 2】如图 3 所示，在光滑的水平面上，劲度系数为 $k = 3.0$ N/m 的轻弹簧一端固定于 O 点，另一端连接一个质量为 $m = 2.0$ kg 的小球，假设弹簧在无作用力时的长度，可忽略不计. 小球在弹簧作用下做匀速圆周运动，系统的机械能为 $E_0 = 12$ J. 现沿小球运动的径向给其突然打击，使小球瞬间获得一径向速度 $v_{r0} = 1.0$ m/s，求：(1) 此后运动过程中小球到 O 点的最近距离和最远距离；(2) 运动的周期[1].

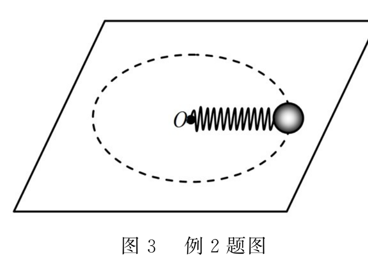

图 3　例 2 题图

解析：(1) 设小球受到打击之前运动的速度为 v_0，轨道半径为 r_0，由牛顿第二定律有

$$kr_0 = m\frac{v_0^2}{r_0}$$

由机械能守恒定律有

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kr_0^2$$

联立方程解得

$$r_0 = 2.0\ \text{m} \qquad v_0 = \sqrt{6}\ \text{m/s}$$

小球受到打击后系统的总机械能为

$$E=E_0+\frac{1}{2}mv_{r0}^2=13\ \mathrm{J}$$

由于沿径向打击不影响小球的角动量，则小球的角动量为

$$L=mv_0r_0$$

在径向运动的转折点，有效势能等于总能量，即 $\frac{L^2}{2mr^2}+\frac{1}{2}kr^2=E$，代入数据并整理得

$$\frac{3}{2}r^4-13r^2+24=0$$

解方程得 $r^2=\frac{13\pm5}{3}\ \mathrm{m}^2$，可知小球到 O 点的最近距离和最远距离分别为

$$r_1=\sqrt{\frac{24}{9}}\ \mathrm{m}\approx1.63\ \mathrm{m}\qquad r_2=\sqrt{6}\ \mathrm{m}\approx2.45\ \mathrm{m}$$

(2) 小球的运动轨迹为椭圆，由于弹簧在无作用力时的长度可忽略不计，则小球受到的有心力即弹簧弹力可表示为 $F=kr$，是线性正比力，因此力心 O 位于椭圆的中心，可知椭圆的半长轴为 $a=r_2$，半短轴为 $b=r_1$，那么椭圆的面积为 $S=\pi ab=4\pi$. 由于角动量 $L=mv_0r_0$，可知小球运动的面积速率为

$$S'=\frac{L}{2m}=\frac{1}{2}v_0r_0=\sqrt{6}\ \mathrm{m^2/s}$$

所以小球环绕力心运动的周期为

$$T=\frac{S}{S'}=\frac{4\pi}{\sqrt{6}}\ \mathrm{s}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi\ \mathrm{s}\approx5.1\ \mathrm{s}$$

另一解法：由于小球在线性正比力的作用下沿椭圆运动，因此环绕运动的周期等于以 $k=3.0\ \mathrm{N/m}$ 为劲度系数的弹簧振子做简谐运动的周期，即

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\ \mathrm{s}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi\ \mathrm{s}\approx5.1\ \mathrm{s}$$

点评：由于力心位于椭圆的中心，那么小球到力心的最大距离等于半长轴，最小距离等于半短轴，而且环绕周期等于简谐运动的周期，还可利用匀速圆周运动求周期. 值得注意的是，若问小球相对于力心从最大距离处第一次运动到最小距离处经历的时间为多少，并非等于半个周期，而是等于 $\frac{1}{4}$ 周期. 求得弹簧的长度为 $r_0=2.0\ \mathrm{m}$，数值较大，因此在题中对弹簧在无作用力时的长度忽略不计是可行的，而且必须忽略不计.

3　结束语

总之，由于质点受到有心力的特点不同，使得运动轨迹的形状不同，若为椭圆，则力心在椭圆中的位置不同，那么径向运动转折点的个数不同，计算运动周期的方法和公式都不同. 具体而言，在平方反比力作用下的椭圆运动的力心位于椭圆的一个焦点，运动周期遵循开普勒第三定律，即只与椭圆的半长轴有关，而与椭圆的离心率无关(可以取 0 或 1)；在线性正比力作用下的椭圆运动的力心位于椭圆的中心，运动周期等于简谐运动的周期，即等于以线性正比力系数为劲度系数的弹簧振子的周期. 此外，这两种不同形式的椭圆运动还遵循相同的规律，即在运动过程中的角动量守恒，面积速率恒定，这为计算椭圆运动的周期提供了更一般化的方法.

参 考 文 献

1　胡少希，孙伟. 有效势能在高中物理竞赛中的应用[J]. 物理教师，2020，41(5)：95 ～ 96

2　黄晶，俞超，申强. 俄罗斯物理奥林匹克[M]. 合肥：中国科学技术大学出版社，2020. 209 ～ 210

Preliminary Exploration on the Law of Two Different Forms of Elliptical Movement

Zheng Jin

(Lingyuan Vocational Education Center，Chaoyang，Liaoning　122500)

Abstract：This paper demonstrates，induction and summarizes the laws of elliptical motion of under the action of two different properties central force from various aspects，and gives ingenious solutions to two physical problems about elliptical motion.

Key words：central force；elliptical motion；center of force position；turning point of motion；period