

傅科摆运动规律的研究*

姜付锦 李 都 刘 颖

(武汉市黄陂区第一中学 湖北 武汉 430300)

(收稿日期:2021-07-27)

摘要:先写出傅科摆动力学微分方程;接着证明傅科摆只在地球两极处正则动量守恒,并求出傅科摆的 v_θ, v_φ 与 θ 关系式;然后通过数值模拟发现一个有趣的现象,即傅科摆在水平面的振动形成“拍”现象,在竖直方向上振动周期为 $T_z = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}$;最后给出傅科摆振动近似解,得到傅科摆进动周期 $T_\varphi = \frac{2\pi}{\omega_0} \sin \lambda$;并给出傅科摆进动轨迹闭合周期解的条件 $2m\sqrt{\frac{g}{R}} = n\omega_0 \sin \lambda$ (m, n 为正整数).

关键词:傅科摆 正则动量 数值模拟 拍现象 简正角频率

傅科摆是法国物理学家傅科 1851 年在巴黎首先制成,摆线长大约是 67 m,通过这个实验证明地球在自转.由于科氏力的存在,傅科摆在来回摆动的时候又在绕垂直轴缓慢的转动,类似水星近日点的进动现象.大学教材^[1]在分析傅科摆时,认为摆球在竖直方向上没有运动,摆线的拉力近似等于摆球的重力,得到摆球的振动规律,这样处理可以让小球的运动有解析解.若忽略地球的自转,按照以上分析发现傅科摆的运动轨迹可能是椭圆,但实际上小球的运动轨迹不可能是椭圆.

1 傅科摆的动力学微分方程

如图 1 和图 2 所示,傅科摆所处纬度为 λ ,摆线长为 R ,摆球质量为 m ,重力加速度为 g ,则

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\frac{x(t)}{R} F(t) + 2m\omega_0 \sin \lambda \frac{d}{dt} y(t)$$

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -\frac{y(t)}{R} F(t) -$$

$$2m\omega_0 \left[\sin \lambda \frac{d}{dt} x(t) + \cos \lambda \frac{d}{dt} z(t) \right]$$

$$m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = \frac{R-z(t)}{R} F(t) + 2m\omega_0 \cos \lambda \frac{d}{dt} y(t) - mg$$

摆球的限制方程为

$$x^2(t) + y^2(t) + [R - z(t)]^2 = R^2 \quad (2)$$

式(1)没有解析解,可以这样近似处理

$$R - z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} =$$

$$R \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2R^2} + \dots \right) \approx R \quad (3)$$

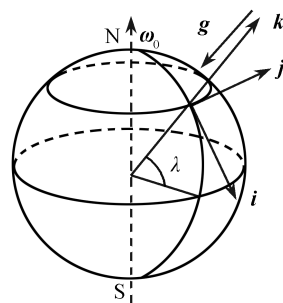


图1 傅科摆在地球上的坐标系

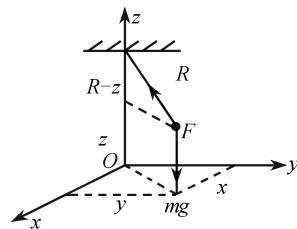


图2 傅科摆受力分析

式(1)中最后一式变为

$$F = mg - 2m\omega_0 \cos \lambda \frac{d}{dt} y(t) \approx mg \quad (4)$$

则式(1)前两项可变为

$$\ddot{x} - 2\omega_0 \dot{y} \sin \lambda + \frac{g}{r} x = 0$$

$$\ddot{y} + 2\omega_0 \dot{x} \sin \lambda + \frac{g}{R} y = 0 \quad (5)$$

* 湖北省教育学会教师教育专业委员会 2020 年课题“数值模拟在物理问题研究中应用研究”阶段性成果之一,课题编号:HBJSJY2020-027

进一步分析,可得傅科摆的运动规律^[1-5],

$$x(t) = (A+B) \cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right) \cos(\omega_0 \sin \lambda)t + (A-B) \sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right) \sin(\omega_0 \sin \lambda)t \quad (6)$$

$$y(t) = -(A+B) \sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right) \sin(\omega_0 \sin \lambda)t + (A-B) \sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right) \cos(\omega_0 \sin \lambda)t$$

式(6)中 A, B 是两个积分常数,其值由摆球的初始条件决定.

以上处理可等效为:一根原长为零的弹簧(ZLS)振子在匀强磁场中的运动^[6],带电粒子所受洛伦兹力与科氏力可以等效^[3];若傅科摆在赤道处摆球不受科氏力,傅科摆的运动是球面摆,其运动轨迹不可能是椭圆,其运动轨迹类似水星近日点进动现象^[7];参考文献[1]之所以认为傅科摆在赤道处时运动轨迹可能是椭圆,是因为它没有考虑摆球在竖直方向上的运动.

2 傅科摆在地球两极处运动规律

设傅科摆所处纬度为 λ ,从图3可以看出地球自转的角速度 ω_0 在 xOz 平面内,并与 $-x$ 方向的夹角为 λ ,由图3可知角速度为

$$\omega_0 = -i\omega_0 \cos \lambda + k\omega_0 \sin \lambda \quad (7)$$

其中 ω_0 的模为一个定值,即为地球自转的角速度.

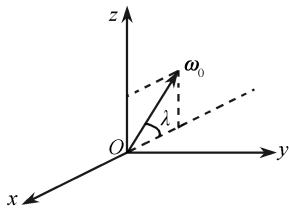


图3 角速度的方向

对于傅科摆而言,因为地球的自转,摆球所受的科氏力为

$$\mathbf{F}_{\text{科}} = -2m\omega_0 \times \mathbf{v}' \quad (8)$$

(1)当 ω_0 沿 z 方向时, \mathbf{v}' 对应的 $\mathbf{F}_{\text{科}}$ 沿 \mathbf{v}' 方向,大小为 $2mv'_\theta \omega_0 \cos \theta$, \mathbf{v}' 对应的 $\mathbf{F}_{\text{科}}$ 过 z 轴,如图4所示,对 z 轴应用角动量定理有

$$2mv'_\theta \omega_0 R \cos \theta \sin \theta dt = d(mv'_\theta R \sin \theta) \quad (9)$$

利用 $v'_\theta = R \frac{d\theta}{dt}$,将式(9)变形,得

$$d(mv'_\theta R \sin \theta + m\omega_0 R^2 \cos^2 \theta) = 0 \quad (10)$$

得

$$mv'_\theta R \sin \theta + m\omega_0 R^2 \cos^2 \theta = C \quad (11)$$

所以,傅科摆此时正则动量守恒.

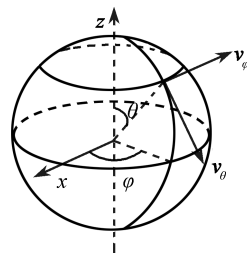


图4 傅科摆正则动量研究

(2)若还存在 ω_{0x} ,则 $2mv'_\theta \times \omega_{0x}$ 与 z 轴平行,对 z 轴不产生力矩,如图5所示,有

$$v_{//} = v_\theta \cos \theta \quad v_z = -v_\theta \sin \theta \quad (12)$$

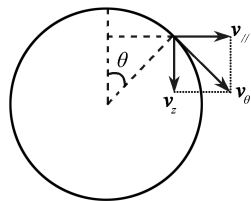


图5 傅科摆的经向速度

由于 $2mv_{//} \times \omega_{0x}$ 与 z 轴平行,不产生力矩, $2mv_z \times \omega_{0x}$ 沿 $-j$ 方向,它对 z 轴的冲量矩为

$$(R \sin \theta \cos \varphi i + R \sin \theta \sin \varphi j) \times (-2mv_\theta \omega_0 \cos \lambda \sin \theta j) dt =$$

$$M dt = -2Rm\omega_0 v_\theta \sin^2 \theta \cos \varphi \cos \lambda dt =$$

$$-2mR^2 \omega_0 \sin^2 \theta \cos \varphi \cos \lambda d\theta \quad (13)$$

因为 φ 也是变量,所以式(13)不能写成全微分的形式,对 z 轴用角动量定理

$$-2mR^2 \omega_0 \sin^2 \theta \cos \varphi \cos \lambda d\theta =$$

$$d(mv'_\theta R \sin \theta + m\omega_0 R^2 \sin \lambda \cos^2 \theta) \quad (14)$$

因为 $\lambda \neq \frac{\pi}{2}$,且 φ 也是变量,所以傅科摆此时正则动量不守恒.

参考文献[2]之所以认为“傅科摆在水平面内正则动量守恒”,是因为它没有考虑摆球在竖直方向的振动,故摆球在竖直方向运动引起的科氏力为零;若考虑摆球在竖直方向上运动,则傅科摆只在地球两极处正则动量守恒.

2.1 傅科摆运动的两个速度

如图 6 所示,在球坐标系中,由机械能守恒和正则动量守恒,有^[8]

$$mgR\cos\theta_0 = \frac{1}{2}m(v_\theta^2 + v_\varphi^2) + mgR\cos\theta \quad (15)$$

$$mv_\varphi R\sin\theta + m\omega_0 R^2 \cos^2\theta = m\omega_0 R^2 \cos^2\theta_0 \quad (16)$$

联立式(15)、(16)得

$$v_\varphi = \frac{1}{\sin\theta} \left[R\omega_0(\cos^2\theta_0 - \cos^2\theta) \right]^2$$

$$v_\theta = \sqrt{2gR(\cos\theta_0 - \cos\theta) - \left[\frac{1}{\sin\theta} R\omega_0(\cos^2\theta_0 - \cos^2\theta) \right]^2} \quad (17)$$

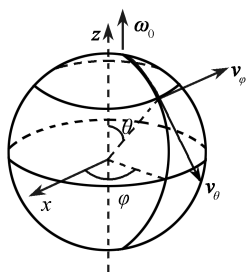


图 6 傅科摆速度与角度关系

2.2 傅科摆运动的周期

在 m, ω_0, R, θ_0 确定后,摆球在经线方向的运动是 $\theta_0 \rightarrow 0 \rightarrow \theta_0 \dots$ 往复运动. 由 v_θ, v_φ 与 θ 的关系式可知: v_θ 只是 θ 的函数,即在同一 θ 处, v_θ 的大小是一样的,因此 $\theta_0 \rightarrow 0$ 的时间与 $0 \rightarrow \theta_0$ 的时间相等,都为 $\frac{T_\theta}{2}$. 因此有

$$T_\theta = 2 \left| \int_{\theta_0}^0 \frac{Rd\theta}{v_\theta} \right| \quad (18)$$

在一个周期内,沿纬线方向转过的角度 $\Delta\varphi$, 由于

$$dt = \frac{R\sin\theta d\varphi}{v_\varphi} = \frac{Rd\theta}{v_\theta} \quad (19)$$

所以

$$d\varphi = \frac{v_\varphi d\theta}{v_\theta \sin\theta} \quad \Delta\varphi = 2 \left| \int_{\theta_0}^0 \frac{v_\varphi d\theta}{v_\theta \sin\theta} \right| \quad (20)$$

轨迹闭合性的条件

$$n_1 \Delta\varphi = 2\pi n_2 \quad (21)$$

式中, n_1, n_2 为正整数.

3 傅科摆运动的数值模拟解

傅科摆的实际运动非常复杂,没有解析解,可以进行数值模拟分析和近似分析.

3.1 傅科摆运动的数值模拟图

$$(1) m = 1 \text{ kg}, R = \frac{1\,000}{\pi^2} \text{ m}, g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \omega_0 =$$

$$\frac{2\pi}{2\,000} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \lambda = \frac{\pi}{2}, \text{模拟结果如图 7} \sim \text{12 所示.}$$

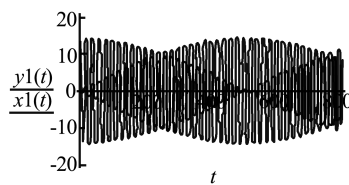


图 7 x 和 y 与 t 关系

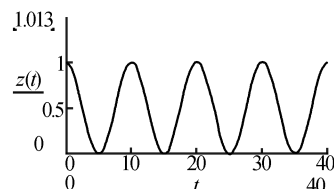


图 8 z 与 t 关系

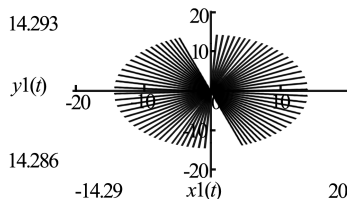


图 9 傅科摆进动轨迹 1

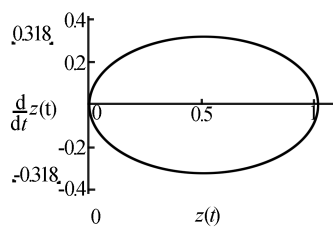


图 10 z' 与 z 相图

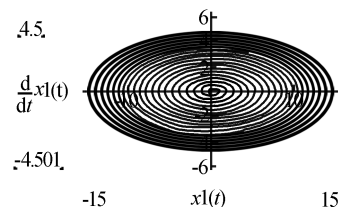


图 11 x' 与 x 相图

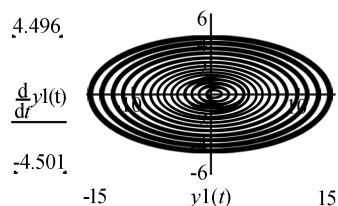


图 12 y' 与 y 相图

(2) $m = 1 \text{ kg}, R = \frac{4\,000}{\pi^2} \text{ m}, g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \omega_0 =$

(3) $m = 1 \text{ kg}, R = \frac{4\,000}{\pi^2} \text{ m}, g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \omega_0 =$

$\frac{2\pi}{3\,000} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \lambda = \frac{\pi}{6}$, 模拟结果如图 13 ~ 18 所示.

$\frac{2\pi}{1\,000} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \lambda = \frac{\pi}{6}$, 模拟结果如图 19 ~ 24 所示.

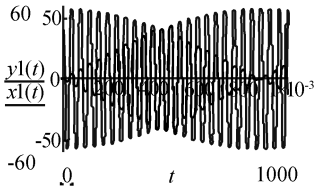


图 13 x 和 y 与 t 关系

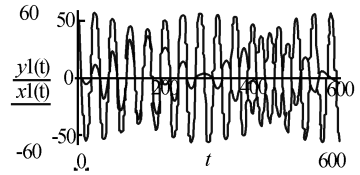


图 19 x 和 y 与 t 关系

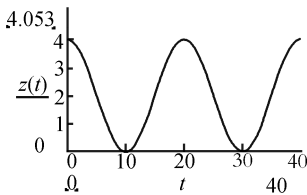


图 14 z 与 t 关系

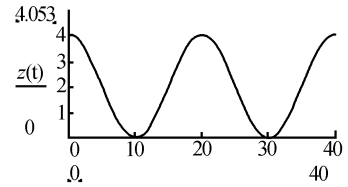


图 20 z 与 t 关系

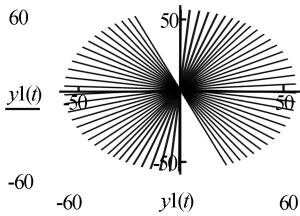


图 15 傅科摆进动轨迹 2

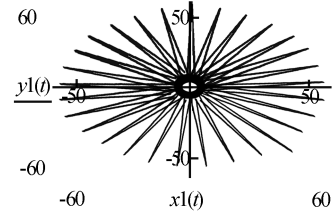


图 21 傅科摆进动轨迹 3

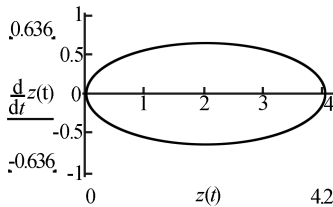


图 16 z' 与 z 相图

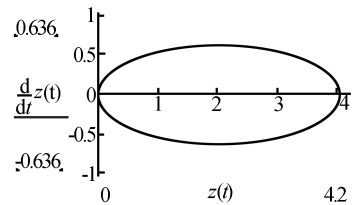


图 22 z' 与 z 相图

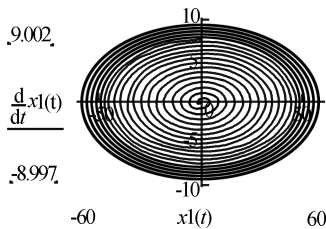


图 17 x' 与 x 相图

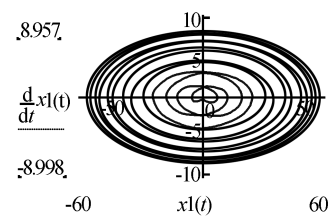


图 23 x' 与 x 相图

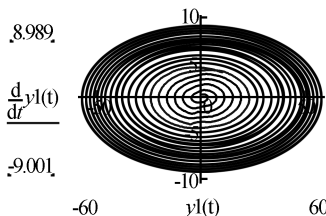


图 18 y' 与 y 相图

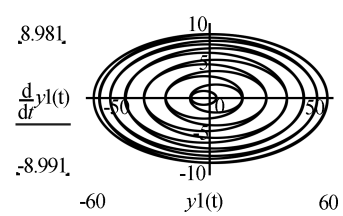


图 24 y' 与 y 相图

(4) $m = 1 \text{ kg}$, $R = 67 \text{ m}$, $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{24 \times 3600} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\lambda = \frac{49}{180} \pi$, 模拟结果如图 25 ~ 27 所示.

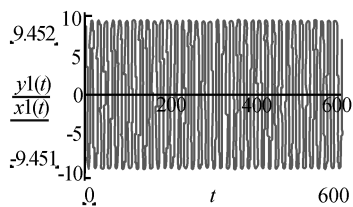


图 25 x 和 y 与 t 关系

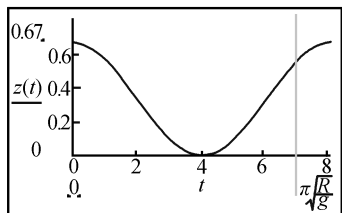


图 26 z 与 t 关系

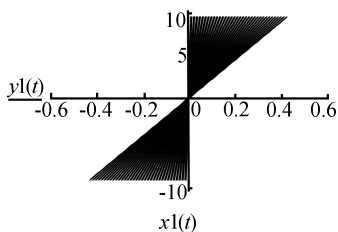


图 27 傅科摆进动轨迹 4

可以发现,傅科摆在 x 与 y 方向上两个位移与时间关系形成“拍”现象,分别由两个简正角频率相差很小的振动叠加而成^[10];摆球在竖直方向上的振动周期 $T_z = \pi \sqrt{\frac{R}{g}}$,而不是参考文献[1]中 $T_z = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$;当地球自转角速度取实际值时,傅科摆运动轨迹进动非常缓慢.

3.2 傅科摆运动的近似解

笔者结合上面的数值模拟解猜想傅科摆在 x 轴、 y 轴和 z 轴方向上运动近似解分别为

$$\begin{aligned} x(t) &= A \left[\sin \left(\sqrt{\frac{g}{R}} + \alpha \right) t - \sin \left(\sqrt{\frac{g}{R}} - \alpha \right) t \right] \\ y(t) &= A \left[\cos \left(\sqrt{\frac{g}{R}} + \alpha \right) t + \cos \left(\sqrt{\frac{g}{R}} - \alpha \right) t \right] \quad (22) \\ z(t) &= B \left[1 + \cos \left(2\sqrt{\frac{g}{R}} t \right) \right] \end{aligned}$$

式(22)中 $\alpha = \omega_0 \sin \lambda$,与地球的自转角速度及纬度有关; A 和 B 的数值与傅科摆开始的位置有关,

其中 $B = \frac{1}{2} z_0$, $A = \frac{y_0}{2}$;在竖直方向上振动周期 $T_z = \pi \sqrt{\frac{R}{g}}$,水平面内的振动两个简正角频率分别为 $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{R}} + \alpha$, $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{R}} - \alpha$;傅科摆进动周期 $T_\varphi = \frac{2\pi}{(\omega_2 - \omega_1)} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sin \lambda}$.

3.3 傅科摆运动近似解与数值模拟解对比

傅科摆的相关参数如下: $m = 1 \text{ kg}$, $R = \frac{1000}{\pi^2} \text{ m}$, $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{2000} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\lambda = \frac{\pi}{2}$,结果如图 28 ~ 33 所示.

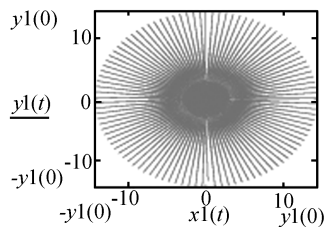


图 28 傅科摆进动图

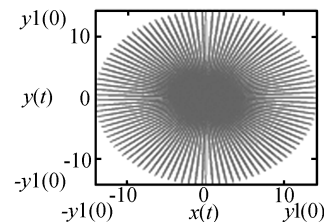


图 29 傅科摆进动近似解

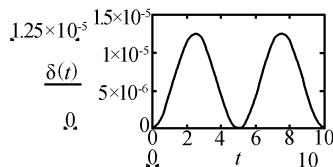


图 30 摆长近似解的相对误差

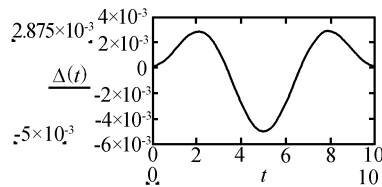


图 31 近似解能量的相对误差

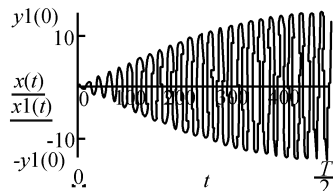
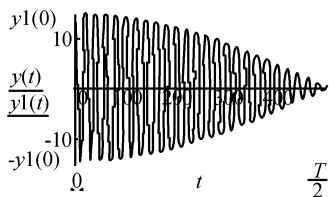


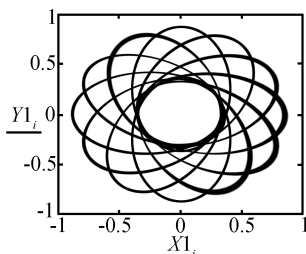
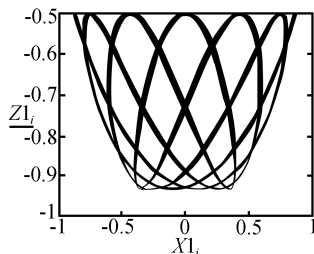
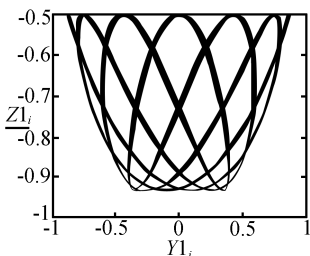
图 32 x 近似解与数值模拟解对比图

图33 y 近似解与数值模拟解对比图

通过以上6幅图的对比,可以发现傅科摆运动的近似解与数值模拟解的相对误差很小,尤其是 x 与 y 的两种解几乎重合,充分说明在误差允许范围内傅科摆运动近似解的合理性。

3.4 傅科摆在赤道处进动现象

若将傅科摆放在赤道处,则其所受科氏力为零。先让摆球在某一水平内做匀速圆周运动,再让小球的角速度有一个微扰,则摆球一种可能运动轨迹的三视图如图34~36所示。

图34 x 与 y 关系图图35 z 与 x 关系图图36 z 与 y 关系图

可以发现,摆球的运动轨迹是一种闭合周期解,其在水平面上的投影类似“水星近日点进动”现象;最外侧与最内侧分别对应小球运动的最高点和最低点,两幅侧视图完全相同;若小球在纬线方向和在经线方向

上运动周期之比是有理数,则小球在三维空间的运动轨迹有闭合周期解^[9];若摆球初始角速度满足特定条件时,其运动轨迹侧视图可能是李萨如图形^[7]。

4 结束语

虽然傅科摆运动轨迹存在进动现象,但不全是摆球所受科氏力所致;傅科摆只在两极处正则动量守恒;通过数值模拟发现:傅科摆在 x 轴与 y 轴振动过程会形成“拍”现象,它在竖直方向上振动周期 $T_z = \pi \sqrt{\frac{R}{g}}$,在水平面内振动的两个简正角频率分别为 $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{R}} + \omega_0 \sin \lambda$, $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{R}} - \omega_0 \sin \lambda$,傅科摆的进动周期 $T_\varphi = \frac{2\pi}{(\omega_2 - \omega_1)} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sin \lambda}$;傅科摆所处纬度越低,傅科摆进动角速度越小,进动周期越长;若傅科摆的相关物理量满足 $2m \sqrt{\frac{g}{R}} = n\omega_0 \sin \lambda$ (m, n 为正整数),则傅科摆运动轨迹是闭合的。

参考文献

- 周衍柏. 理论力学教程(第3版)[M]. 北京:高等教育出版社,2009. 189~194
- 辛国君,刘树新,舒幼生. 傅科摆的进动与轨迹的周期性[J]. 大学物理,2013,32(4):5~7
- 宋志军,孙锦如,韩玖荣. 用带电摆球在磁场中的运动模拟傅科摆[J]. 大学物理,2012,31(11):55~58
- 陈刚. 傅科摆轨道的计算与讨论[J]. 大学物理,1993,12(6):6~8
- 孟勇. 摆球运动的仿真[J]. 大学物理,2020,39(1):38~44
- 涂德新,姜付锦. 弹簧振子在匀强磁场中运动规律的研究[J]. 物理教师,2017(10):64~65
- 姜付锦,李都,刘颖. 单摆小球在三维空间中运动规律研究[J]. 物理教师,2021(4):68~71
- 姜付锦,郎军. 对匀强磁场中球面摆运动规律的研究[J]. 物理通报,2017(11):18~24
- 向裕民. 摆球的二维摆动[J]. 重庆大学学报(自然科学版),2006,23(6):50~52
- 赵凯华,罗蔚茵. 新概念物理教程 力学(第2版)[M]. 北京:高考教育出版社,2004,264~266