关于一道狄利克雷边界条件下电势计算题的思考*

胡梦蓉　勾　翰　邓永菊

（湖北第二师范学院物理与机电工程学院　湖北 武汉　430205；

湖北第二师范学院理论物理研究所　湖北 武汉　430205）

郑　华

（陕西师范大学物理学与信息技术学院　陕西 西安　710119）

（收稿日期：2021－08－10）

摘　要：利用格林函数法计算了在狄利克雷边界（第一类边界）条件下，边界为无穷大平面、边界电势在由 $x=\pm1$ 和 $y=\pm1$ 的 4 个点形成的正方形区域内为 1、其他地方为零的上半空间的电势精确解. 利用函数图像辅助方法阐明如何得到狄利克雷边界条件下电势在 $z\to0$ 的近似解，分别用精确解和近似解讨论了在 $z\to0$ 时的边界电势，两者给出了相同的结果. 求解过程中采用的分区、变量代换和近似思想能给学生的学习带来启发.

关键词：狄利克雷边值　边界电势　近似方法　精确解

求解特定边界条件下的电势是电动力学学习过程中需要掌握的重难点之一. 这一类问题常用的求解方法为格林函数法，格林函数法的核心思想是叠加原理[1]. 在应用格林函数法之前，必须先得到满足相应边界条件的格林函数.

格林函数是指在某空间区域 V 中由处于 $\boldsymbol{x}'$ 的单位点电荷所激发的电势 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$. 如果在 V 的边界 S 上有边值条件 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')|_S=0$，那么 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ 称为第一类边界问题（也称狄利克雷问题）的格林函数[2]. 当求出给定边界条件下的格林函数后，原则上利用格林函数法可以求出相同几何边界条件下任何电荷分布的电势. 因为任何电荷分布都可以看成点电荷的叠加，利用叠加原理就可以由一个点电荷的电势求出在相同几何边界条件下任意电荷分布的电势.

对于边界为无穷大平面、边界电势由在 $x=\pm1$ 和 $y=\pm1$ 四个点形成的正方形区域内为 1、其他地方为零的上半空间的电势，利用上半空间的格林函数[3]

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}\right]\tag{1}$$

和狄利克雷边界条件下的格林函数公式，可以得到电势的表达式为

$$\Phi(x,y,z)=\frac{z}{2\pi}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x'\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y'\cdot\frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}\tag{2}$$

对于这一具体问题，本文给出了电势式(2) 的解析解即精确解；分别用电势的精确解和近似解讨论了在 $z\to0$ 的边界电势，两者给出了相同的结果.

1　电势的精确解

求解电势精确解的过程是将式(2) 解析积分的过程. 式(2) 直接积分困难，不容易求解[4]. 为将问题简化，采用变量代换，并把 $z=0$ 平面分解成不同的区域进行分别计算. 做变量代换

* 青年科学基金项目，项目编号：12104140

作者简介：胡梦蓉（2001－　），女，在读本科生.

通讯作者：邓永菊（1965－　），女，副教授，主要从事理论物理研究.

$$A=\sqrt{(x-x')^2+z^2}$$

$$y-y'=A\tan\theta$$

式(2) 变为

$$\Phi(x,y,z)=\frac{z}{2\pi}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x'\int_{\arcsin\frac{y-1}{\sqrt{A^2+(y-1)^2}}}^{\arcsin\frac{y+1}{\sqrt{A^2+(y+1)^2}}}\mathrm{d}\theta\,\frac{\cos\theta}{A^2}=$$

$$\frac{z}{2\pi}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x'\,\frac{1}{A^2}\left[\frac{y+1}{\sqrt{A^2+(y+1)^2}}-\frac{y-1}{\sqrt{A^2+(y-1)^2}}\right]\tag{3}$$

由于 y 不是积分变量,再次采用变量代换,取

$$B=y+1\qquad C=y-1$$

将式(3) 简化为

$$\Phi(x,y,z)=\frac{z}{2\pi}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x'\,\frac{1}{A^2}\,\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}-$$

$$\frac{z}{2\pi}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x'\,\frac{1}{A^2}\,\frac{C}{\sqrt{A^2+C^2}}\tag{4}$$

观察可以发现,式(4) 等号右边的两项积分形式是完全相同的. 因此求解式(2) 的问题简化成了求解积分

$$\Phi_T=\frac{z}{2\pi}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x'\,\frac{1}{A^2}\,\frac{T}{\sqrt{A^2+T^2}}\tag{5}$$

的问题,其中 T 代表式(4) 中的 B 或 C. 由于 A,B,C 3 个变量的正负号取决于所考虑的区域,因此计算式(5) 时需要采用分区域求解.

以 $-1<x<1$ 为例,采用变量代换,将式(5) 中对 x' 的积分变换成对 A 的积分求解. 已知 $A=\sqrt{(x-x')^2+z^2}$,由于 $x-x'$ 在积分区域$[-1,x)$ 和$(x,1]$的正负号相反,因此需要将积分区域$[-1,1]$分成$[-1,x)$ 和$(x,1]$ 两个区域来进行积分变量代换. 这样式(5) 被改写成

$$\Phi_T=$$

$$\frac{z}{2\pi}\int_{z}^{\sqrt{(x+1)^2+z^2}}\mathrm{d}A\,\frac{T}{A\sqrt{A^4+(T^2-z^2)A^2-z^2T^2}}+$$

$$\frac{z}{2\pi}\int_{z}^{\sqrt{(x-1)^2+z^2}}\mathrm{d}A\,\frac{T}{A\sqrt{A^4+(T^2-z^2)A^2-z^2T^2}}\tag{6}$$

再次取变量代换

$$W=\frac{1}{A^2}$$

并假设 $T>0$,式(6) 变为

$$\Phi_T=$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\frac{1}{(x+1)^2+z^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{T^2}-\frac{1}{z^2}\right)}^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{T^2}+\frac{1}{z^2}\right)}\frac{\mathrm{d}W}{\sqrt{-W^2+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{T^2}+\frac{1}{z^2}\right)\right]^2}}+$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\frac{1}{(x-1)^2+z^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{T^2}-\frac{1}{z^2}\right)}^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{T^2}+\frac{1}{z^2}\right)}\frac{\mathrm{d}W}{\sqrt{-W^2+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{T^2}+\frac{1}{z^2}\right)\right]^2}}\tag{7}$$

这样积分式(5) 就变成了常见积分

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+c\quad(a>0)$$

之和,因此可得

$$\Phi_T=\frac{1}{4\pi}\left[\pi-\arcsin\frac{\frac{1}{(x+1)^2+z^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{T^2}-\frac{1}{z^2}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{T^2}+\frac{1}{z^2}\right)}-\right.$$

$$\left.\arcsin\frac{\frac{1}{(x-1)^2+z^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{T^2}-\frac{1}{z^2}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{T^2}+\frac{1}{z^2}\right)}\right]\tag{8}$$

因为在式(7) 的变量代换中假设了 $T>0$,所以可得到式(5) 的解析解式(8). 在电势解式(4) 中 $B=y+1$ 和 $C=y-1$,它们的正负性与 y 所在的区域有关. 为了利用式(8),需要把 y 也分成不同的区域来考虑. 取 $-1<y<1$ 时,$B=y+1>0$ 且 $C=y-1<0$,因此电势在区域$[-1<x<1,-1<y<1]$的精确解为

$$\Phi(x,y,z)=\Phi_B+\Phi_{-C}\tag{9}$$

将式(8) 代入式(9) 就可得到具体表达式,我们在第二部分中给出. 利用相同的变量变换,可以给出电势在其他区域 ($-\infty<y<-1$ 或 $1<y<\infty$) 的精确解. 但由于当 ($-\infty<x<-1$ 或 $1<x<\infty$) 时,$x-x'$ 在积分区域$[-1,1]$ 中具有相同的正负号,因此在做类似式(6) 变换时不需要将积分区域分开,所得只有一项. 因此在写出剩余区域的精确解前,需要改写式(8) 得到不同区域所对应的 Φ_T. 经过简单的计算可以得到,当 $-\infty<x<-1$ 时

$$\Phi_T'=\frac{1}{4\pi}\left[\arcsin\frac{\frac{1}{(x+1)^2+z^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{T^2}-\frac{1}{z^2}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{T^2}+\frac{1}{z^2}\right)}-\right.$$

$$\left.\arcsin\frac{\frac{1}{(x-1)^2+z^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{T^2}-\frac{1}{z^2}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{T^2}+\frac{1}{z^2}\right)}\right]\tag{10}$$

当 $1<x<\infty$ 时

$$\Phi_T''=\frac{1}{4\pi}\left[\arcsin\frac{\frac{1}{(x-1)^2+z^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{T^2}-\frac{1}{z^2}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{T^2}+\frac{1}{z^2}\right)}-\arcsin\frac{\frac{1}{(x+1)^2+z^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{T^2}-\frac{1}{z^2}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{T^2}+\frac{1}{z^2}\right)}\right] \tag{11}$$

至此可以用 Φ_T',Φ_T 和 Φ_T'' 将电势 $\Phi(x,y,z)$ 的精确解完全表示出来,如表 1 所示.

表 1　在不同区域内电势的精准解

$\Phi(x,y,z)$	$x<-1$	$-1<x<1$	$x>1$
$y<-1$	$-\Phi_{-B}'+\Phi_{-C}'$	$-\Phi_{-B}+\Phi_{-C}$	$-\Phi_{-B}''+\Phi_{-C}''$
$-1<y<1$	$\Phi_B'+\Phi_{-C}'$	$\Phi_B+\Phi_{-C}$	$\Phi_B''+\Phi_{-C}''$
$y>1$	$\Phi_B'-\Phi_C'$	$\Phi_B-\Phi_C$	$\Phi_B''-\Phi_C''$

2　边界电势

初始边界电势 $\Phi(x,y,z)$ 在由 $x=\pm1$ 和 $y=\pm1$ 的 4 个点形成的正方形区域内为 1、其他地方为零. 如果简单从格林函数法给出的电势式(2) 看,很容易地会误认为当 $z\to0$ 时,$\Phi(x,y,z)=0$,得出格林函数法不能给出正确边界电势的结论. 下面将从精确解和近似解两种结果出发,证明格林函数法给出正确的边界电势.

以区域$[-1<x<1,-1<y<1]$为例,从表 1 中写出电势的精确解

$$\Phi(x,y,z)=\Phi_B+\Phi_{-C}=$$

$$\frac{1}{4\pi}\left\{2\pi-\arcsin\frac{\frac{1}{(x+1)^2+z^2}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(y+1)^2}-\frac{1}{z^2}\right]}{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{1}{z^2}\right]}-\arcsin\frac{\frac{1}{(x-1)^2+z^2}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(y+1)^2}-\frac{1}{z^2}\right]}{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{1}{z^2}\right]}-\arcsin\frac{\frac{1}{(x+1)^2+z^2}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-y)^2}-\frac{1}{z^2}\right]}{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-y)^2}+\frac{1}{z^2}\right]}-\arcsin\frac{\frac{1}{(x-1)^2+z^2}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-y)^2}-\frac{1}{z^2}\right]}{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-y)^2}+\frac{1}{z^2}\right]}\right\} \tag{12}$$

当 $z\to0$ 时

$$\Phi(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}[2\pi-4\arcsin(-1)]=1$$

将表 1 中其他区域的电势写出,然后令 $z\to0$,可以得到 $\Phi(x,y,z)=0$. 可见,格林函数法给出了正确的初始边界电势.

还可用近似的方法分析式(2) 能给出正确的边界电势. 在区域$[-1<x<1,-1<y<1]$内取一点,并将 z 取很小的值,利用画图软件画出式(2) 中被积表达式的函数图像,如图 1 所示.

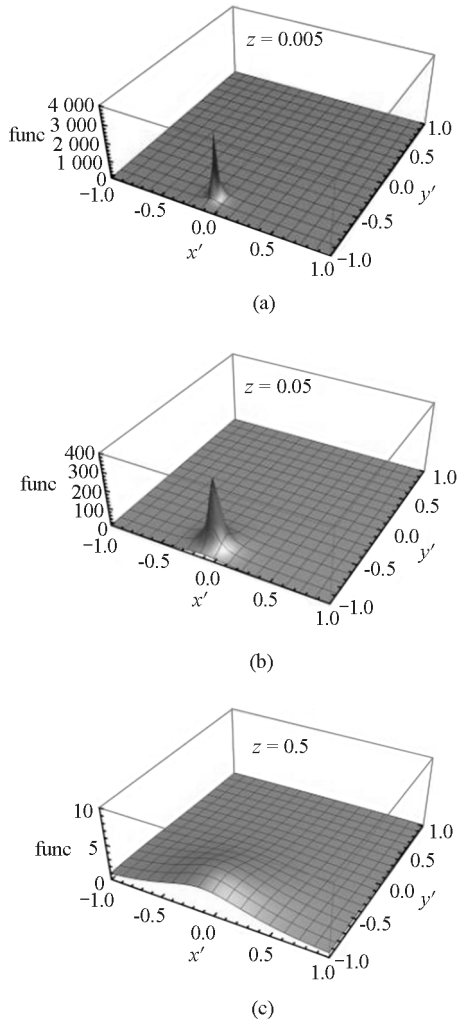

图 1　式(2) 中被积表达式在 $x=-0.1$,$y=-0.8$ 与 $z=0.005$,0.05 和 0.5 的函数图像

当 $z\to0$ 时,式(2) 中的被积表达式

$$\frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

在 $x'\to x$,$y'\to y$ 和 $z\to0$ 时的值非常大,而其他积

分区域趋于零，积分的主要贡献来自于点(x,y)附近的区域. 因此我们可以把式(2)中在$[-1<x'<1,-1<y'<1]$区域上的积分合理近似为以(x,y)为中心，ρ_0为半径的一个小形区域的积分. 采用极坐标，式(2)可以写为

$$\Phi(x,y,0)=\lim_{z\to 0}\frac{z}{2\pi}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x'\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y'\cdot\frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}=\lim_{z\to 0}z\int_0^{\rho_0}\mathrm{d}\rho\frac{\rho}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=1 \tag{13}$$

而在$[-1<x<1,-1<y<1]$以外的情况，采用同样画图的方法可以很清楚地看到由于$z\to 0$而积分表达式为零，从而给出电势为零. 通过以上的讨论，可以证实格林函数法给出正确的边界电势.

3　总结

本文用格林函数方法计算了在狄利克雷边界条件下，边界为无穷大平面、边界电势在由$x=\pm 1$和$y=\pm 1$的 4 个点形成的正方形区域内为 1、其他地方为零的上半空间电势的精确解. 用函数图像辅助分析，得到了电势合理的近似解. 用计算得到的电势精确解和近似方法得到的近似解讨论了格林函数法给出的电势在$z\to 0$时的边界电势，其是满足初始边界条件的. 在计算过程中所利用的分区、变量代换及近似思想能有效地将一个复杂问题简化，有助于问题的解决. 本文以一典型狄利克雷边界条件下电势的计算为例，为学生阐释了如何遵循一般逻辑、利用简单的技巧或近似将复杂的物理问题化繁为简. 这种过程是为学生“授之以渔”，希望能为学生的学习带来启发.

参 考 文 献

1　刘连寿. 理论物理基础教程[M]. 北京：高等教育出版社，2003. 191 ～ 196

2　郭硕鸿. 电动力学[M]. 北京：高等教育出版社，2008. 59

3　姚瑞正. 数学物理方法(第 3 版)[M]. 北京：科学出版社，2009. 199

4　林璇英. 电动力学题解(第 3 版)[M]. 北京：科学出版社，2018. 237 ～ 238

Thoughts on an Electric Potential Calculation Question under Dirichlet Boundary Condition

Hu Mengrong　Gou Han　Deng Yongju

(School of Physics and Mechanical Electrical & Engineering, Hubei University of Education, Wuhan, Hubei 430205; Institute of Theoretical Physics, Hubei University of Education, Wuhan, Hubei　430205)

Zheng Hua

(Schoolof Physics & Information Technology, Shaanxi Normal University, Xi′an, Shaanxi　710119)

Abstract: In this paper, the exact solution of the electric potential in the upper half space is given using Green′s function method with infinite plane boundary where the boundary potential is equal to 1 in the square region formed by four points of x = ±1 and y = ±1 and equal to 0 in other places. The corresponding approximate solution of the potential when z → 0 was obtained by using the function image aided method. Both the exact solution and approximate solution give the right boundary electric potential. We hope that the strategies applied in the paper are inspiring to students.

Key words: Dirichlet boundary condition; boundary potential; approximate method; exact solution