

从矛盾到统一 应用力学 3 种观点综合分析“提绳”模型*

余 潘 叶晟波

(浙江省慈溪中学 浙江 宁波 315300)

(收稿日期:2021-08-31)

摘要:“提绳”模型是竞赛力学中应用微元法分析问题的典型模型,学生在分析处理问题时发现应用冲量与动量变化观点和做功与能量转化观点,得到不同的结果.文章从该矛盾出发,深度分析了应用做功与能量转化观点所构建的物理模型的问题所在,并在修正模型后给出了统一自洽的结果.最后从力与运动观点再次验证结果的正确性,让学生充分体验了物理学的统一美.

关键词:力学 3 种观点 “提绳”模型 微元法

【原题】如图 1 所示,一长为 L 密度均匀的柔软绳,其单位长度的密度为 λ . 将其卷成一堆放在地面上. 若手握绳的一端,以匀速 v 将其上提. 当绳端脱离地面的高度为 x 时,求手的提力 F .

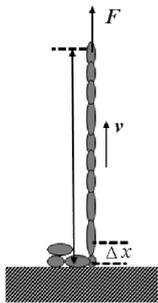


图 1 原题题图

学生在处理分析问题通常采用冲量与动量变化观点和做功与能量转化观点,却得到不一样的结果.

1 冲量与动量变化观点 $I = \Delta p$

如图 2 所示,将物体看作两部分进行研究,第一部分:在空中长为 x 的绳做匀速运动;第二部分:长为 Δx 微元上端与第一部分下端发生作用, Δx 微元下端恰好未与桌面上的绳子发生作用,经 Δt 时间第二部分微元 Δx 与第一部分共速. 分别对第一、第二部分列式. 因空中部分受力平衡有

$$F = F_{21} + G_1$$

对微元部分由动量定理

$$(F_{12} - G_2) \Delta t = \Delta x \lambda v$$

由于作用力与反作用力

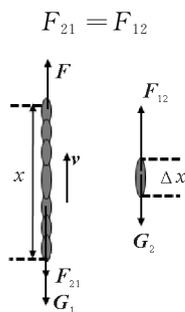


图 2 两部分绳受力示意图

两部分的重力分别为

$$G_1 = x \lambda g$$

$$G_2 = \Delta x \lambda g$$

其中

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v$$

得到

$$F = x \lambda g + \lambda v^2 + \Delta x \lambda g$$

由于 $\Delta x \lambda g$ 为小量^[1,2],可忽略

得

$$F = x \lambda g + \lambda v^2$$

2 做功与能量转化观点 $W = \Delta E$

如图 3 所示,同样将研究对象分成两部分,同上. 在提力 F 作用下绳子向上匀速提升了一微元 Δx ,在此过程中可认为 F 为恒力. 从能量变化的角度,整体重力势能增加量等效为底部的第二部分微元 Δx 移至顶部所增加的重力势能,整体的动能增

* 宁波市 2021 教育科学规划研究课题“强基背景下物理创新素养的培养研究”,课题编号:2021YGH127

加量为第二部分微元 Δx 增加的动能.

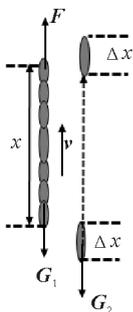


图3 功能转化等效图

$$F\Delta x = \Delta x\lambda gx + \frac{1}{2}\Delta x\lambda v^2$$

化简得

$$F = x\lambda g + \frac{1}{2}\lambda v^2$$

结果不一样,问题出在哪?

分析比较两种不同观点得到的结果发现,应用做功与能量转化观点计算得到的提力 F 比应用冲量与动量变化得到的力要小一些.

我们的猜想: 是否有机能的损失没有计入,而导致计算结果偏小?

类比的思路: 一个质量为 $x\lambda$ 的物体速度为 v , 与另一个静止的质量为 $\Delta x\lambda$ 的物体发生碰撞,达到共同速度,在此过程中存在机械能损失^[3],“提绳”模型是否正是因为该部分的机械能损失而导致计算结果的不一致?

验证猜想: 将“提绳”过程分成3个状态. 状态1,空中 x 长段绳有速度 v , 受力平衡; 状态2, $x + \Delta x$ 长段绳有速度 $v_{共}$; 状态3, $x + \Delta x$ 长段绳有速度 v .

从状态1到状态2过程中, x 长段绳与 Δx 长段绳发生完全非弹性碰撞,速度变为 $v_{共}$,存在机械能损失 $E_{损}$.

状态1到状态2动量守恒

$$x\lambda v + 0 = (x\lambda + \Delta x\lambda)v_{共}$$

状态1到状态2损失的机械能

$$E = \frac{1}{2}x\lambda v^2 - \frac{1}{2}(x\lambda + \Delta x\lambda)v_{共}^2 = \frac{1}{2}\lambda v^2 \left(\frac{x\Delta x}{x + \Delta x} \right)$$

根据小量近似 $\frac{x\Delta x}{x + \Delta x} \rightarrow \Delta x$

$$E = \frac{1}{2}\Delta x\lambda v^2$$

从状态2到状态3过程中, $x + \Delta x$ 长段绳在外力作用下速度从 $v_{共}$ 变化到 v , 考虑整个过程: 从状

态1到状态3,根据功能转化的关系

$$F\Delta x = \Delta x\lambda gx + \frac{1}{2}\Delta x\lambda v^2 + E$$

得

$$F = x\lambda g + \lambda v^2$$

与冲量与动量变化观点得到的结果一致,验证了猜想.

3 力与运动观点 $F = ma$

前面两种模型都是将研究对象分成两部分: 空中 x 长段绳与将要与之发生作用的微元 Δx 长段绳, 需要考虑两部分之间的作用. 现把整根绳子作为一个整体, 不需要考虑内力, 从受外力与质心运动的角度分析“提绳”模型^[3]. 如图4建立一维坐标, 空中 x 段绳质心坐标 $y_{c1} = \frac{x}{2}$, 桌面 $L - x$ 段绳质心坐标 $y_{c2} = 0$, 整根绳子的质心坐标为 y_c , 有

$$y_c = \frac{x\lambda y_{c1} + (L - x)\lambda y_{c2}}{x\lambda + (L - x)\lambda} = \frac{x^2}{2L}$$

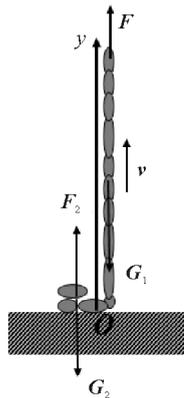


图4 整体受力示意图

质心位置坐标对时间求二阶导数为质心加速度 a_c

$$a_c = \ddot{y}_c = \frac{v^2}{L}$$

发现质心沿竖直方向做匀加速运动^[4].

在竖直方向以整体为研究对象, 根据

$$F_{合} = ma \quad F - G_1 + F_2 - G_2 = L\lambda a_c$$

其中空中部分段绳子重力

$$G_1 = x\lambda g$$

对于静止在桌面上的 $L - x$ 段绳子

$$F_2 = G_2 = (L - x)\lambda g$$

得 $F = x\lambda g + \lambda v^2$, 与前两种观点得到的结果一致, 再次验证结果的自洽.

教学反思: 力学3种观点是力学体系中的核心组成部分, 平时教学中应引导学生多角度综合分析

“猎犬追狐狸”的大学物理解法

李开玮 李振华 刘顺彭

(广东理工学院智能制造学院 广东 肇庆 526100)

(收稿日期:2021-09-14)

摘要:猎犬追狐狸是一道比较经典的竞赛题目,从大学物理角度讨论该问题,求解了猎犬的运动时间及轨迹.

关键词:猎犬追狐狸 大学物理 定积分

1 问题描述

猎犬追狐狸是一个十分有趣的问题,深入研究可以延伸到如何拦截来袭导弹的问题,具有一定的启发意义.猎犬的初始加速度可以通过观察猎犬经过极短时间后,对速度求导得到^[1].更感兴趣的应该是猎犬追上狐狸需要的时间,以及轨迹问题.文献^[2]通过构造矢量的乘积并求导,使时间微分前面的系数为常数,再求积分的方法巧妙地求出了追上所需的时间;而文献^[3]另辟蹊径通过构造虚力做功的方法,使虚力的功率恒定,虚力的功又能简洁地求出来,这样来得到追击的时间,各有千秋.本文从大学物理的角度,利用运动分解结合定积分的知识

探讨猎犬追击时间和轨迹.

如图1所示,一只狐狸以不变速度 u 沿直线 AB 逃跑,一只猎犬以不变速率 v 追击狐狸,运动方向始终对准狐狸,某时刻狐狸在 F 点,猎犬在 D 点,相距 L ,且 $FD \perp AB$,问猎犬追上狐狸需要多长时间?

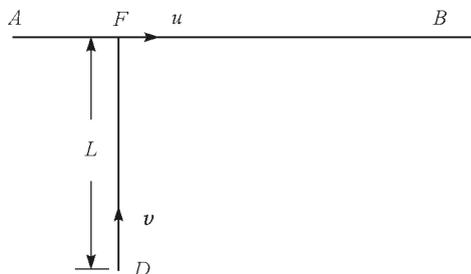


图1 猎犬追狐狸示意图

问题,经历从矛盾到统一的探究过程,激发学生的质疑与探索精神,使学生对知识的理解更深刻,对方法的选择与应用更娴熟与合理.

参考文献

1 余建刚.“小量近似”在高考和竞赛中的应用[J].理科考试研究,2019(19):37~39

2 张军.小量近似方法在竞赛中的应用[J].物理教学探讨,2005(20):37~39

3 董静雨.完全非弹性碰撞中的动能损失[J].物理通报,2018,37(7):44~45

4 李虎骧.质心运动定理及其应用[J].物理教师,1994(5):41~42

From Contradiction to Unity, Comprehensive Analysis of Lifted Rope Model on the 3 Opinions of Applied Mechanics

Yu Pan Ye Shengbo

(Zhejiang Cixi Middle School, Ningbo, Zhejiang 315300)

Abstract: "Rope lifting" model is a typical model for analyzing problems by using infinitesimal method in competition mechanics. Students found the different results were obtained by applying the viewpoint of impulse and momentum change, or obtained by the viewpoint of work and energy transformation. Starting from this contradiction, this paper deeply analyzes the problems of the physical model constructed from the viewpoint of work and energy conversion, and gives a unified and self consistent result after modifying the model. Finally, the correctness of the results is verified again from the viewpoint of force and motion, students have fully experienced the unified beauty of physics.

Key words: three viewpoints of mechanics; rope lifting model; infinitesimal method