

量纲分析在热力学统计物理中的教学应用^{*}

蓝善权

(岭南师范学院物理科学与技术学院 广东 湛江 524048)

(收稿日期:2021-09-26)

摘要:热力学统计物理是一门综合性较强的课程,涉及力学、热学、电磁学、光学、量子力学等内容.它的教与学难度较大,特别是宏观物理量与微观物理量之间的关系复杂并难以理解.而量纲分析却能较好地解决这个问题.它基于物理量的量纲,很容易就能确定各个物理量之间的关系或者验证公式的正确性.通过 3 个问题的求解,即理想气体的碰壁数、光子气体的物态方程、零温时自由电子气体的简并压.文章介绍了量纲分析在热力学统计物理中的具体应用.可以看到,量纲分析有助于学生理解物理规律及其对应的数学表达式,也有助于学生分析问题和解决问题的能力培养.

关键词:量纲分析 热力学统计物理 理想气体 光子气体 自由电子气体 教学

1 引言

每个物理量都有属性,比如:声速、光速、车速,它们具有相同的属性,即速度;长度、时间、速度、温度,它们具有不同的属性.物理量的属性可用“量纲”来表征,但并非每一个物理量都需要指定一个量纲.目前发现 7 个基本物理量(“基本量”),分别是长度、质量、时间、温度、物质的量、电流和发光强度,所有其他物理量(“导出量”)都可以由这 7 个基本物理量导出.例如,压强 p 的量纲可以写成 $[p] = ML^{-1}T^{-2}$,其中 M 表示质量量纲, L 表示长度量纲, T 表示时间量纲,数字表示量纲指数.基于齐次定理和 Π 定理,物理问题中物理量之间关系的分析称为量纲分析^[1~6].下面通过 3 个例子来阐述它在热力学统计物理中的具体应用^[7].

2 量纲分析在热力学统计物理中的运用举例

热力学统计物理中涉及的基本物理量(量纲)是温度 $T(\Theta)$ 、物质的量 $\nu(N)$ 、时间 $t(T)$ 、长度 $L(L)$ 、质量 $m(M)$ 、电流 $I(I)$.采用量纲分析法求解问题的思路是:分析找到可能相关的物理量;写出无

量纲量等式;列出量纲表;求解量纲指数方程组^[8].

2.1 理想气体的碰壁数 即单位时间内碰到单位面积器壁上的分子数

分析:理想气体由理想气体方程描述,碰壁数 Γ 必然由理想气体方程中的各个物理量所决定.因为碰壁数是强度量,所以涉及的物理量不可能是广延量.从而总结得到可能相关的并且独立的物理量有分子数密度 n 、分子质量 m 、玻尔兹曼常数 k 、温度 T .

解:写出无量纲量

$$\Pi = n^{-\alpha} m^{-\beta} k^{-\gamma} T^{-\delta} \Gamma \quad (1)$$

把涉及的 5 个物理量的量纲分别列出来,如表 1 所示.

表 1 碰壁数涉及的 5 个物理量量纲

物理量	Γ	n	m	k	T
量纲	$L^{-2}T^{-1}$	L^{-3}	M	$ML^2T^{-2}\Theta^{-1}$	Θ

对无量纲量求量纲,带入上表所示物理量的量纲,得到量纲关系式

$$\dim \Pi = [n]^{-\alpha} [m]^{-\beta} [k]^{-\gamma} [T]^{-\delta} [\Gamma] =$$

^{*} 2020 年岭南师范学院教改项目“基于互联网的热力学统计物理教学研究和改革实践”.

作者简介:蓝善权(1988-),男,博士,讲师,主要从事全息引力、黑洞热力学、热力学统计物理等方向的研究工作.

$$L^{3\alpha-2\gamma-2}M^{-\beta-\gamma}T^{2\gamma-1}\Theta^{\gamma-\delta}=1 \tag{2}$$

由上式可以求得量纲指数的方程组

$$\begin{cases} 3\alpha-2\gamma-2=0 \\ -\beta-\gamma=0 \\ 2\gamma-1=0 \\ \gamma-\delta=0 \end{cases} \tag{3}$$

解得

$$\begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=-\frac{1}{2} \\ \gamma=\frac{1}{2} \\ \delta=\frac{1}{2} \end{cases} \tag{4}$$

从而得到 $\Pi=n^{-1}m^{\frac{1}{2}}k^{-\frac{1}{2}}T^{-\frac{1}{2}}\Gamma$,即

$$\Gamma=\Pi n\sqrt{\frac{kT}{m}}=\Pi\frac{\sqrt{2\pi}}{4}n\bar{v} \tag{5}$$

其中 $\bar{v}$ 是分子平均速率. 该式表明理想气体的碰壁数正比于分子数密度和分子平均速率. 这与精确求得的碰撞数 $\Gamma=n\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}=\frac{1}{4}n\bar{v}$ 一致,但待定参数 $\Pi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 无法由量纲分析得到,需要由实验或者其他方法确定.

对于该问题,还可以选择其他独立物理量的组合,比如,用压强 p 替换掉玻尔兹曼常数 k ,将得到

$$\Gamma=\Pi\sqrt{\frac{pn}{m}}=\Pi n\sqrt{\frac{kT}{m}}$$

等等. 但不管选用哪一组独立物理量,最终结果都是等价的.

2.2 光子气体的物态方程

分析:钱伯初先生用量纲分析法求出了平衡态的光子气体的内能密度与温度的关系^[3]. 本文采用同样的方法来求光子气体的物态方程. 平衡态下,描述光子气体的宏观物理量只有温度 T 、压强 p 和体积 V ,而没有光子的个数,因为光子数是不守恒的. 所求物态方程就是关于上述宏观物理量之间的关系方程 $p=p(T,V)$. 又因为压强是强度量,与广延量无关,所以光子气体的物态方程可以写成 $p=p(T)$. 此外,光子是电磁波,可能与光速 c 有关;光

子气体是量子系统,可能与普朗克常数有关;涉及热平衡,还可能与玻尔兹曼常数 k 有关.

解:写出无量纲量

$$\Pi=T^{-\alpha}c^{-\beta}\hbar^{-\gamma}k^{-\delta}p \tag{6}$$

把涉及的 5 个物理量的量纲分别列出来,如表 2 所示.

表 2 光子气体的物态方程涉及的 5 个物理量量纲

物理量	p	T	c	$\hbar$	k
量纲	$ML^{-1}T^{-2}$	Θ	LT^{-1}	ML^2T^{-1}	$ML^2T^{-2}\Theta^{-1}$

对无量纲量求量纲,代入表 2 所示物理量的量纲,得到量纲关系式

$$\begin{aligned} \dim\Pi &=[T]^{-\alpha}[c]^{-\beta}[\hbar]^{-\gamma}[k]^{-\delta}[p]= \\ &\Theta^{-\alpha+\delta}L^{-\beta-2\gamma-2\delta-1}T^{\beta+\gamma+2\delta-2}M^{-\gamma-\delta+1}=1 \end{aligned} \tag{7}$$

由上式可以求得量纲指数的方程组

$$\begin{cases} -\alpha+\delta=0 \\ -\beta-2\gamma-2\delta-1=0 \\ \beta+\gamma+2\delta-2=0 \\ -\gamma-\delta+1=0 \end{cases} \tag{8}$$

解得

$$\begin{cases} \alpha=4 \\ \beta=-3 \\ \gamma=-3 \\ \delta=4 \end{cases} \tag{9}$$

从而得到 $\Pi=T^{-4}c^3\hbar^3k^{-4}p$,即

$$p=\Pi\frac{k^4T^4}{c^3\hbar^3} \tag{10}$$

该式表明光子气体的压强正比于温度的四次方. 这与精确求得的光压 $p=\frac{\pi^2k^4T^4}{45c^3\hbar^3}$ 一致,待定参数 $\Pi=\frac{\pi^2}{45}$. 采用相同的方法还可以求出光子气体的熵的表达式

$$S=\Pi'\frac{k^4T^3V}{c^3\hbar^3}$$

2.3 零温时自由电子气体的简并压

分析:电子的自旋是 $\frac{1}{2}$,即电子是费米子,具有泡利不相容性. 就算是在绝对零温下,较高能级上也有电子占据,因此自由电子气体具有压强,被称为简

并压. 压强是强度量, 与广延量无关. 零温时, 在自由电子气体中, 简并压应该与电子数密度有关, 即电子数密度越大, 简并压越大. 电子还具有质量 m 和电荷 q 两个属性, 简并压可能与它们有关. 此外, 自由电子气体是量子系统, 简并压可能与普朗克常数有关; 涉及热平衡, 还可能与玻尔兹曼常数 k 有关.

解: 写出无量纲量

$$\Pi = n^{-\alpha} m^{-\beta} q^{-\gamma} \hbar^{-\delta} k^{-\sigma} p \tag{11}$$

把涉及的 6 个物理量的量纲分别列出来, 如表 3 所示.

表 3 简并压涉及的 6 个物理量量纲

物理量	p	n	m	q	$\hbar$	k
量纲	$\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$	L^{-3}	M	IT^{-1}	ML^2T^{-1}	$\text{ML}^2\text{T}^{-2}\Theta^{-1}$

对无量纲量求量纲, 代入表 3 所示物理量的量纲, 得到量纲关系式

$$\begin{aligned} \dim \Pi &= [n]^{-\alpha} [m]^{-\beta} [q]^{-\gamma} [\hbar]^{-\delta} [k]^{-\sigma} [p] = \\ &\text{L}^{3\alpha-2\delta-2\sigma-1} \text{M}^{-\beta-\delta-\sigma+1} \text{I}^{-\gamma} \text{T}^{\gamma+\delta+2\sigma-2} \Theta^{\sigma} = 1 \end{aligned} \tag{12}$$

由上式可以求得量纲指数的方程组

$$\begin{cases} 3\alpha - 2\delta - 2\sigma - 1 = 0 \\ -\beta - \delta - \sigma + 1 = 0 \\ -\gamma = 0 \\ \gamma + \delta + 2\sigma - 2 = 0 \\ \sigma = 0 \end{cases} \tag{13}$$

解得

$$\begin{cases} \alpha = \frac{5}{3} \\ \beta = -1 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 2 \\ \sigma = 0 \end{cases} \tag{14}$$

从而得到 $\Pi = n^{-\frac{5}{3}} m^1 q^0 \hbar^{-2} k^0 p$, 即

$$p = \Pi \frac{\hbar^2}{m} n^{\frac{5}{3}} \tag{15}$$

该式表明零温时自由电子气体的简并压正比于电子数密度的三分之五次方. 这与精确求得的简并压 $p = \frac{(3\pi^2)^{\frac{2}{3}}}{5} \frac{\hbar^2}{m} n^{\frac{5}{3}}$ 一致, 待定参数 $\Pi = \frac{(3\pi^2)^{\frac{2}{3}}}{5}$. 采用相同的方法还可以求出零温时自由电子气体的费

米能级的表达式

$$\epsilon = \Pi' \frac{\hbar^2}{m} n^{\frac{2}{3}}$$

3 总结与讨论

本文例举了量纲分析在热力学统计物理中的应用. 由 3 个实例可知, 量纲分析简单而实用, 它基于物理量的属性来寻找涉及某个问题的物理量之间的关系, 有助于对问题本质的理解、构建清晰的物理图像. 就算是把定理公式给忘记了, 也可以通过量纲分析推导出来. 量纲分析除了在教学中有应用, 在科学研究中的应用更广泛^[9~11]. 但是量纲分析的缺点也很明显, 即它是一种半定量的方法, 无法得到待定参数 Π . 该参数需要由实验或其他方法得到.

参考文献

1 赵凯华. 定性半定量物理学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007

2 徐婕, 詹士昌, 田晓岑. 量纲分析的基本理论及其应用[J]. 大学物理, 2004(5): 167 ~ 180

3 钱伯初. 基础课量纲分析法教学举例(上)[J]. 大学物理, 1983(11): 65 ~ 70

4 钱伯初. 基础课量纲分析法教学举例(下)[J]. 大学物理, 1983(12): 57 ~ 60

5 谭庆明. 量纲分析[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2005

6 梁灿彬, 曹周键. 量纲分析理论[M]. 北京: 中国科技出版传媒股份有限公司, 2020

7 汪志诚. 热力学·统计物理[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013. 11 ~ 12, 266 ~ 271

8 蓝善权, 陈建明. 量纲分析在大学物理热力学部分中的教学应用[J]. 大学物理, 2020, 39(1): 18 ~ 22

9 徐启明, 解立峰, 王永旭, 等. 基于量纲分析的燃料云雾半径计算[J]. 兵器装备工程学报, 2021, 42(5): 168 ~ 172

10 何增, 浦锡锋, 王海兵, 等. 基于量纲分析法的地运动折合位移势规律研究[J]. 石家庄铁道大学学报(自然科学版), 2020, 33(4): 115 ~ 124

11 郑小颖, 王洁光, 戚林玲, 等. 基于量纲分析的宁波象山港大桥桥墩局部冲刷规律研究[J]. 水利水电技术, 2020, 51(8): 111 ~ 118

Application on Dimensional Analysis in the Teaching of Thermodynamics and Statistical Physics

Lan Shanquan

(College of Physical Science and Technology, Lingnan Normal University, Zhanjiang, Guangdong 524048)

Abstract: Thermodynamics and statistical physics is a comprehensive course, involving mechanics, thermotics, electromagnetism, optics, quantum mechanics and so on. This course is difficult to teach and study. Especially the relationship between macro physical quantity and micro physical quantity is complex and difficult to understand. However, dimensional analysis can solve this problem. Based on the dimension of physical quantities, it is easy to find the relationship between various physical quantities or verify the correctness of the formula. This paper introduces the application of dimensional analysis in thermodynamics and statistical physics through the solution of three problems, namely, the wall collision number of ideal gas, the state equation of photon gas and the degenerate pressure of free electron gas at zero temperature. It can be seen that dimensional analysis helps students understand the laws of physics and their corresponding mathematical expressions, and also helps students cultivate their ability to analyze and solve problems.

Key words: dimensional analysis; thermodynamics and statistical physics; ideal gas; photon gas; free electron gas; teaching

(上接第 18 页)

上线下混合式教学,与此同时,丰富线下课堂教学,建立一套课堂演示实验项目体系,激发学生学习热情,提高授课吸引力,并通过贯穿全课程的系统物理创新实践项目,建立观察—实验—记录—总结—归纳的物理规律生成路径,融入讨论式、翻转式教学,增强学生自主学习及实践创新能力。最终建立“线上线下课程资源建设+虚实结合课堂实验+创新训练”三维一体全方位课程及教学体系(图 5),致力于学生实践创新能力培养。

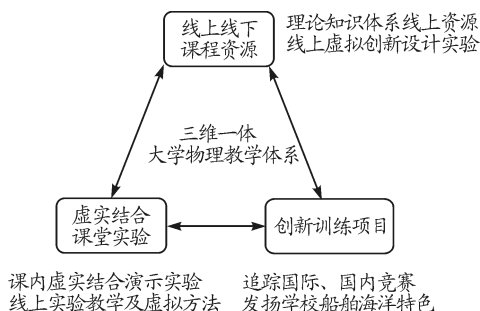


图 5 大学物理课程教学思路

参考文献

- 1 王丽光,朱长明,王鑫鑫,等. 基于创新实践能力培养的理论实验相结合教学模式探究[J]. 广西物理, 2019(40):52~54
- 2 欧阳建明,彭刚,罗剑,等. 虚实结合、线上线下混合的“大学物理实验”教学改革与实践[J]. 高等教育研究学报, 2021(44):58~62
- 3 余晓光,周运志. 大学物理教学中培养学生创新能力的探讨[J]. 物理通报, 2019,38(10):18~21
- 4 戴玉蓉,董科,周雨青. 新工科项目引领下大学物理及实验课程体系的改革与探索[J]. 物理与工程 2021,31(4):15~19
- 5 秦哲,杨广武,胡雪兰,等. 基于便携式课堂演示实验的大学物理教学探索与实践[J]. 大学物理, 2021(40):26~30
- 6 张立云. “双一流”模式下高校大学物理教学改革[J]. 教育现代化, 2020(7):38~39